

I. Physikalisches Institut  
Universität zu Köln

# M10: Viskosität



## PRAKTIKUM A FÜR NEBENFÄCHLER

Version vom 18. Mai 2022

Abzugeben bis: \_\_\_\_\_

Assistent: \_\_\_\_\_

Gruppenmitglieder: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## Wichtige Informationen

Zur Bearbeitung ist es zwingend erforderlich, dass Sie sich mit den Grundlagen der Fehlerrechnung (u. a. Gaußsche Fehlerfortpflanzung, (gewichteter) Fehler des Mittelwerts, grafische Geradenanpassung) vertraut machen. Informationen dazu finden Sie beispielsweise im Dokument „allgemeine Hilfen für das Praktikum A“ auf der Webseite des A-Praktikums<sup>a</sup>.

Aufgrund des Umfangs dieses Versuchs ist es nötig die Blätter mittels Schnellhefter o. ä. zu binden. Bitte lochen Sie die Blätter und heften Sie diese sorgfältig ein. Sollte die Form der Abgabe nicht den Regularien entsprechen, kann die\*der Assistent\*in die Annahme der Auswertung verweigern.

Versuchen Sie innerhalb der vorgegebenen Lücken zu bleiben. Diese geben ungefähr den an entsprechender Stelle erwarteten Umfang vor. Sollte der Platz dennoch nicht ausreichen, fügen Sie ganze Blätter ein, auf welchen deutlich markiert ist, was wozu gehört.

Beachten Sie bitte, dass alle entsprechenden Lücken und Fragestellungen ausgefüllt und beantwortet werden müssen. Insbesondere sind Lücken bis hin zum Messprotokoll bereits vor dem Versuchstag zu bearbeiten. Dies müssen Sie vor Ort nachweisen und wichtige Inhalte frei wiedergeben können. Es wird davon ausgegangen, dass alle Gruppenmitglieder die vollständige Anleitung durchgelesen und verstanden haben. Sollten Sie am Versuchstag nicht ausreichend auf den Versuch vorbereitet sein, wird die\*der Assistent\*in Sie nicht am Versuch teilnehmen lassen.

Die Abgabe muss alle Seiten umfassen, insbesondere aber Seiten mit auszufüllenden Lücken. Dazu gehören in jedem Fall die Titelseite, die Vorbereitung, das Messprotokoll und die Auswertung mit Diskussion.

---

Alle auf dem Deckblatt aufgeführten Gruppenmitglieder sind für die Bearbeitung und fristgerechte Abgabe des Versuchsberichts bzw. dessen erforderlichen Korrekturen zuständig und verantwortlich. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass Sie sich mit den Regeln des A-Praktikums<sup>a</sup> vertraut gemacht haben.

<sup>a</sup> zu finden unter: <https://www.astro.uni-koeln.de/AP/>

Es ist nicht notwendig den Anhang mit auszudrucken. Allerdings kann dieser gerade bei Detailfragen enorm weiterhelfen und soll durchgelesen und verstanden sein.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Vorbereitung (vor dem Praktikum, zu Hause)</b>	<b>2</b>
2.1	Begriffe und Gesetzmäßigkeiten . . . . .	2
2.2	Abschätzen der Fallzeit einer Kugel mit dem Stokesschen Gesetz . . . . .	5
2.3	Abschätzen der Fallzeit einer Kugel mit der Ladenburgkorrektur . . . . .	6
2.4	Abschätzen der Fallzeit einer Kugel mit dem Hagen-Poiseuilleschen Gesetz . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Versuchsaufbau und -beschreibung</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Benötigte Formeln</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Durchführung (im Praktikum)</b>	<b>10</b>
5.1	Inbetriebnahme der Apparatur . . . . .	10
5.2	Messung der Fallzeit der Kugel . . . . .	10
5.3	Wichtige Anmerkungen zum Aufbau . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Auswertung (zu Hause)</b>	<b>13</b>
6.1	Bestimmung der mittleren Fallzeit . . . . .	13
6.2	Temperaturabhängigkeit der Viskosität . . . . .	13
6.3	Bestimmung der molaren Aktivierungsenergie . . . . .	20
<b>7</b>	<b>Diskussion</b>	<b>24</b>
<b>8</b>	<b>Quellen und weiterführende Literatur</b>	<b>26</b>
<b>9</b>	<b>Anhang</b>	<b>27</b>
9.1	Herleitungen und weiterführende Anmerkungen . . . . .	27
9.2	Fehler(formeln) und Geradenanpassung . . . . .	29

# 1 Einleitung

In diesem Versuch beschäftigen Sie sich mit den Wechselwirkungen zwischen Teilchen in einer Flüssigkeit.

Wird ein Gegenstand durch eine Flüssigkeit bewegt, so muss dafür eine Kraft aufgewendet werden. Diese Kraft hängt davon ab, wie leicht oder schwer es ist, die Flüssigkeitsmoleküle gegeneinander zu verschieben. Mathematisch wird diese Eigenschaft durch die Stoffkonstante Viskosität beschrieben. Sie hängt von der Temperatur ab, aber auch von der Art und Stärke der intermolekularen Wechselwirkungen. Letztere werden in der sogenannten Aktivierungsenergie zusammengefasst.

In diesem Versuch werden Sie für verschiedene Flüssigkeiten die Viskosität und aus deren Temperaturabhängigkeit die Aktivierungsenergie bestimmen. Eine gute Vorstellung davon, wieviel Energie wirklich aufgebracht werden muss, um die Teilchen einer Flüssigkeit gegeneinander zu verschieben, liefert der Vergleich mit der Verdampfungsenergie, also der Energie die benötigt wird um die Teilchen komplett voneinander zu trennen.

## 2 Vorbereitung (vor dem Praktikum, zu Hause)

Der folgende Abschnitt bezieht sich auf theoretische Überlegungen und Grundlagen dieses Versuchs. Ergänzungen und weiterführende Anmerkungen befinden sich im Anhang (Abschnitt 9) und sind entsprechend hier markiert.

Beachten Sie bitte, dass die Lücken in diesem Abschnitt auszufüllen sind und am Versuchstag vorgezeigt werden müssen. Um an dem Versuch teilnehmen zu können, müssen Sie die Anleitung vollständig gelesen und verstanden haben und allgemein auf den Versuch vorbereitet sein.

### 2.1 Begriffe und Gesetzmäßigkeiten

- Wie grenzt sich eine Flüssigkeit von Gasen und Festkörpern ab?

---

---

- Welche Besonderheit im Fließverhalten hat ein Newtonsches Fluid?

---

---

- Welcher Begriff beschreibt die innere Reibung? Geben Sie die physikalische Größe mit ihrer Einheit an.

---

---

- Was bewirkt die innere Reibung im Bezug auf die Bewegung von Molekülen?

---

---

- Zwischenmolekulare Kräfte sind elektromagnetische Wechselwirkungen im zwischenmolekularen Bereich. Nennen Sie vier:

— 

---

— 

---

— 

---

- 
- Nennen Sie zwei Eigenschaften von laminarer Strömung:

- 
- 
- Wie hängen dynamische Viskosität und kinematische Viskosität zusammen? (Formel mit Erläuterungen der Variablen angeben.)

- 
- 
- Wie lautet die Auftriebskraft nach dem archimedischen Prinzip? (Formel mit Erläuterungen der Variablen angeben.)

- 
- 
- Ist es richtig, dass ein Körper aufsteigt, falls die Auftriebskraft kleiner als die Abtriebskraft ist?

- 
- 
- Was ist an der Temperaturabhängigkeit der Dichte bei Wasser besonders?

- 
- 
- Wie lautet das Gesetz von Stokes und was beschreibt es? (Formel mit Erläuterungen der Variablen angeben.) Unter welchen Voraussetzungen ist es gültig?
- 
- 
-

- Welche Eigenschaft von Flüssigkeiten berücksichtigt die Ladenburgkorrektur?

---

---

- Die Aktivierungsenergie ist die zur Diffusion erforderliche zusätzliche Energie. Die Diffusion wird in Form einer Arrhenius-Gleichung beschrieben. Nennen Sie die Formel mit Erläuterung der Variablen:

---

---

- Was wird mit einem Höppler-Viskosimeter gemessen? Was ist das Besondere an diesem Aufbau?

---

---

- Was wird von dem Hagen-Poiseuilleschen Gesetz beschrieben? Was muss gegeben sein, damit es gilt?

---

---

---

## 2.2 Abschätzen der Fallzeit einer Kugel mit dem Stokesschen Gesetz

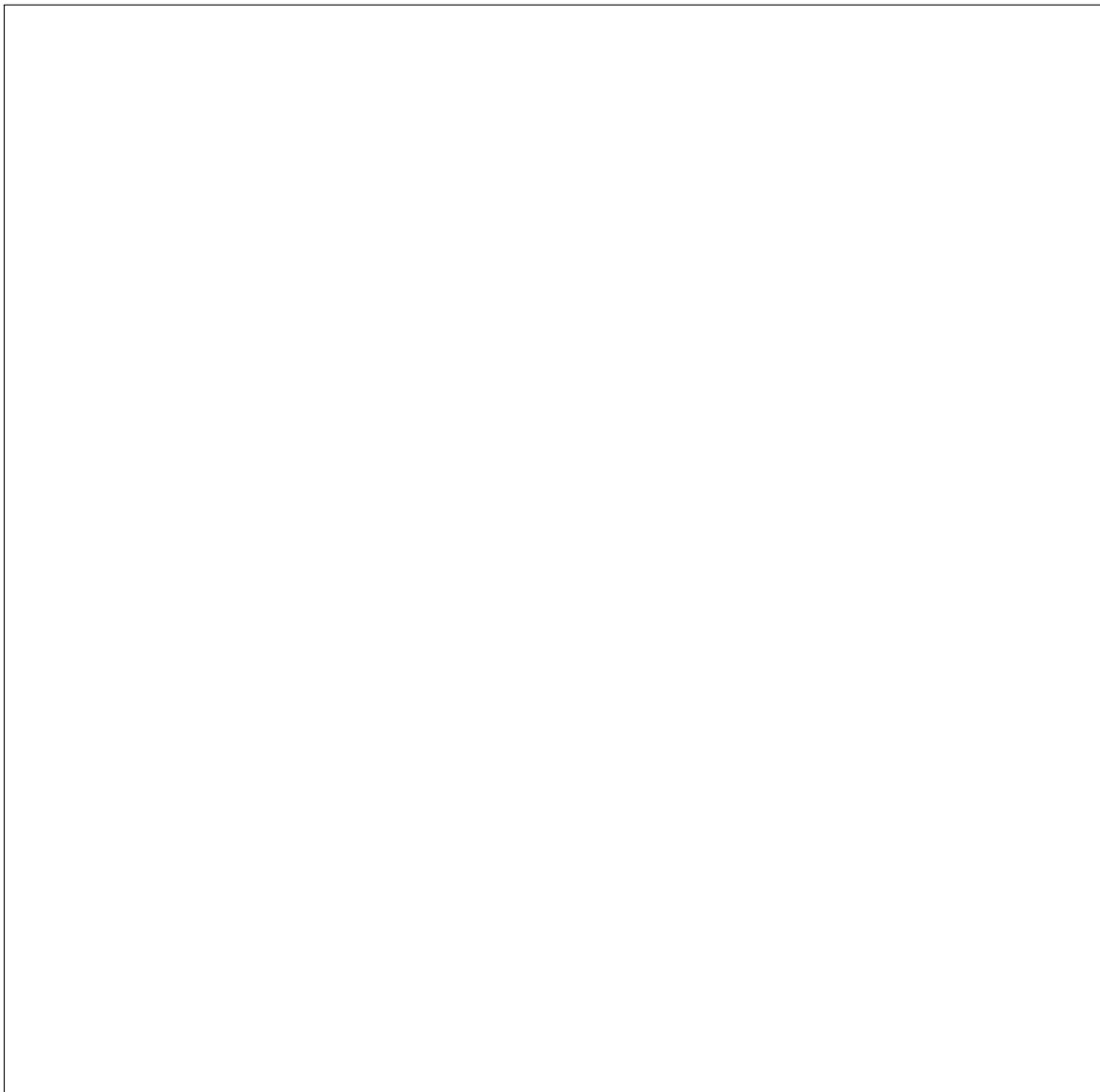
Schätzen Sie unter Verwendung des Stokesschen Gesetzes die Fallzeit einer Kugel für folgendes Experiment ab:

Dichte der Kugel  $\rho_k \approx 2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  (Glas), Dichte der Flüssigkeit  $\rho_f \approx 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  (Wasser), Radius der Kugel  $r_k \approx 1 \text{ cm}$ , Radius des Fallrohrs  $R = \infty$ , Fallhöhe  $h \approx 10 \text{ cm}$ , Viskosität der Flüssigkeit  $\eta \approx 1 \text{ mPa s}$  (Wasser), Erdbeschleunigung  $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

Benutzen Sie hierfür die Formel<sup>1</sup>

$$t = \frac{9\eta h}{2r_k^2 g (\rho_k - \rho_f)}.$$

Wäre diese Fallzeit mit einer Stoppuhr per Hand messbar?



---

<sup>1</sup>Weitere Informationen zu dieser und den folgenden Formeln, sowie deren Herleitungen, finden Sie im Anhang in Abschnitt 9.1.

### 2.3 Abschätzen der Fallzeit einer Kugel mit der Ladenburgkorrektur

In einer anschließenden zweiten Rechnung beziehen Sie die Ladenburgkorrektur ein. Verwenden Sie

$$\tilde{F}_R = F_R \cdot \left(1 + 2,1 \frac{r_k}{R}\right).$$

Gehen Sie dabei vom Extremfall  $\frac{r_k}{R} \approx 1$  aus. Die Fallzeit ergibt sich dann durch

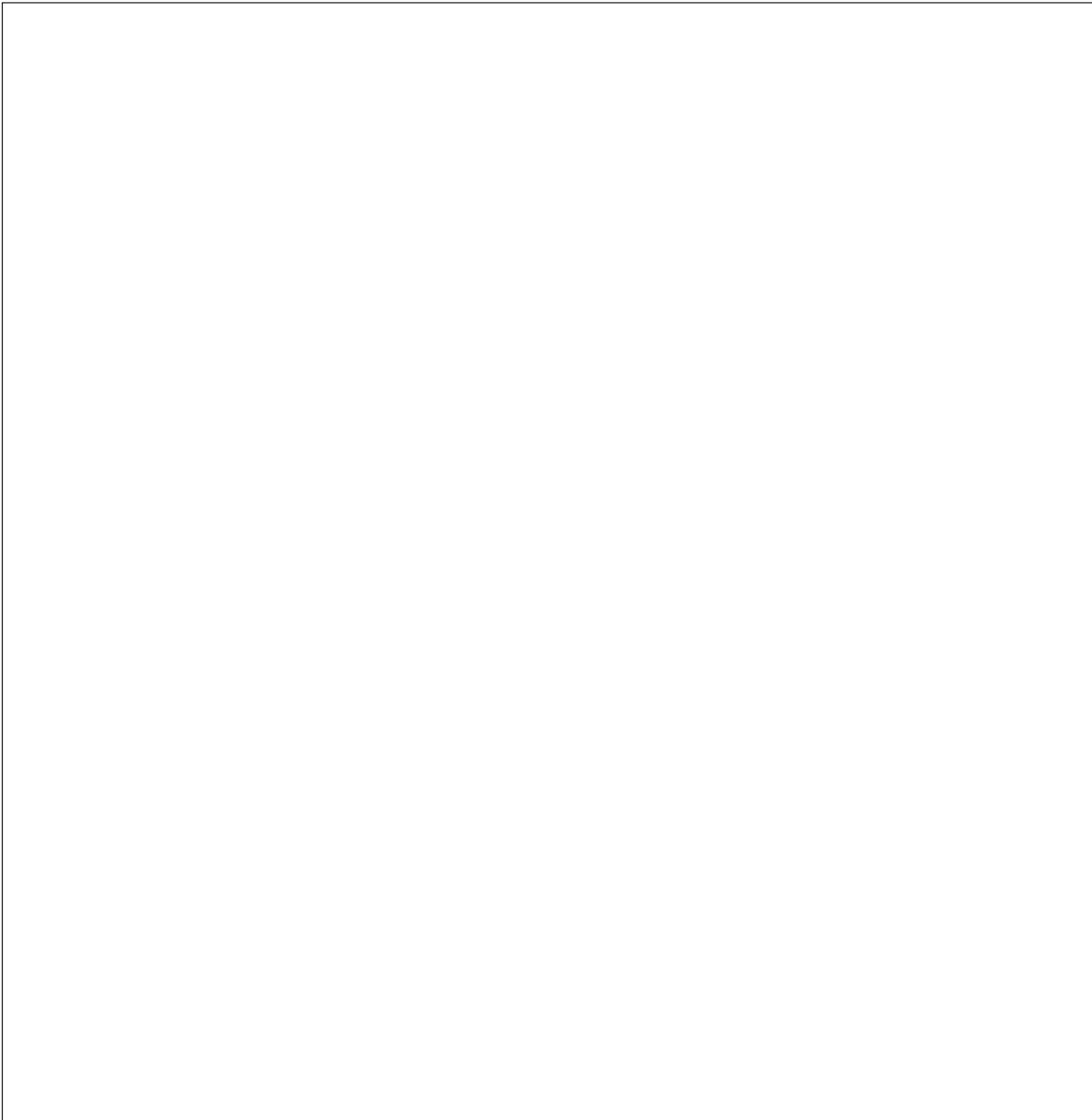
$$t = \frac{9\eta \left(1 + 2,1 \frac{r_k}{R}\right) h}{2r_k^2 g (\rho_k - \rho_f)}.$$

Beantworten Sie mit einem Satz, wie sich das Resultat verändert und ob diese Fallzeit mit einer Stoppuhr messbar ist.

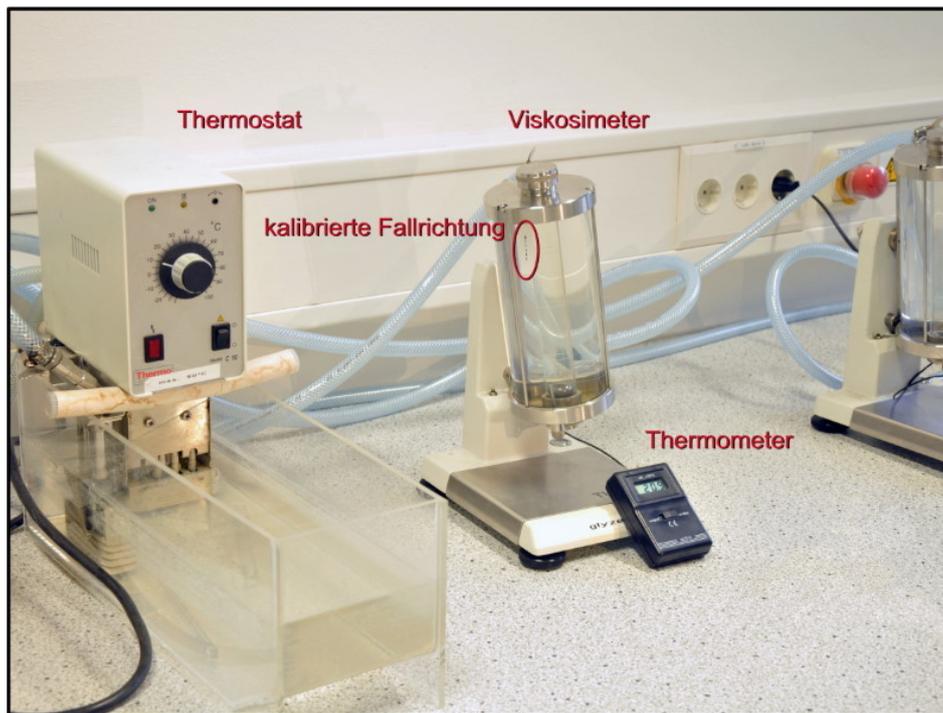
## 2.4 Abschätzen der Fallzeit einer Kugel mit dem Hagen-Poiseuilleschen Gesetz

Betrachten Sie nun das obige Experiment für den Fall, dass Rohr und Kugel etwa den gleichen Durchmesser haben. Nutzen Sie dafür das Hagen-Poiseuillesche Gesetz, d. h. gehen Sie davon aus, dass die Geschwindigkeit der Kugel dadurch begrenzt wird, dass die Flüssigkeit durch einen sehr kleinen Bereich um die Kugel herumströmen muss. Die größte Fließgeschwindigkeit wird an der breitesten Stelle dieses sichelförmigen Bereichs erreicht. Nähern Sie diesen Bereich durch einen Zylinder mit Radius  $r_f \approx 1 \text{ mm}$  und Länge  $l \approx 1 \text{ cm}$  an. Welche Fallzeit erhalten Sie nun? Ist diese Zeit mit einer Stoppuhr messbar? Verwenden Sie folgende Gleichung

$$t = \frac{6\eta l r_k h}{r_f^4 g (\rho_k - \rho_f)}$$



### 3 Versuchsaufbau und -beschreibung



**Abbildung 1:** Foto des Versuchsaufbaus

Das Höpplersche Kugelfall-Viskosimeter besteht aus einer leicht schräg gestellten Fallröhre, die mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt ist. Zur Bestimmung der Viskosität der Flüssigkeit gleitet bzw. rollt eine Kugel in dieser Röhre hinunter und es wird die Zeit gemessen, welche zum Durchlaufen einer festgelegten Strecke benötigt wird. Die Schrägstellung des Fallrohrs dient dazu die Wandkollisionen, die beim senkrechten Fall einer Kugel in einem nur wenig größeren Rohr unvermeidlich auftreten, kontrollierbar zu machen.

Die aufgeklebten Pfeile zeigen die Fallrichtung an, für die das jeweilige Viskosimeter kalibriert wurde. Theoretisch sind die Geräte so entworfen, dass beide Fallrichtungen verwendbar sind. In der Realität können allerdings kleine Beschädigungen oder Ähnliches dazu führen, dass die Kugel bei einigen Geräten in den beiden Richtungen unterschiedlich schnell fällt. Da sich laut Hersteller für die Rückrichtung jedoch nur Abweichungen von  $< 1\%$  ergeben, sind diese Ungenauigkeiten im Rahmen dieses Praktikums vernachlässigbar, sodass praktisch Fallzeitmessungen in beide Richtungen erlaubt sind. Offensichtliche Störeinflüsse, wie z. B. Luftblasen, welche die Kugel in einer Fallrichtung beeinflussen, sind gegebenenfalls natürlich dennoch zu beachten.

Um die Abhängigkeit der Viskosität von der Temperatur untersuchen zu können, befindet sich die Fallröhre in einem Wasserbad, das über ein Thermostat beheizt werden kann. Zur Temperaturmessung dient ein elektronisches Thermometer.

## 4 Benötigte Formeln

Die Viskosität der zu untersuchenden Flüssigkeit ergibt sich aus den Dichten von Kugel und Flüssigkeit,  $\rho_k$  und  $\rho_f$ , der viskosimeterspezifischen Kugelkonstanten  $K$  und der mittleren Fallzeit  $\bar{t}$  als

$$\eta = K (\rho_k - \rho_f) \bar{t}. \quad (1)$$

Die Kugelkonstante fasst mehrere Parameter des Aufbaus zusammen, wie z. B. die Fallstrecke, den Kugelradius und die Erdbeschleunigung. Sollte sich eine der darin enthaltenen Größen ändern, muss der Wert der Kugelkonstanten entsprechend angepasst werden.

Für viele Flüssigkeiten lässt sich die Änderung der Viskosität mit der Temperatur in Form einer Arrhenius-Gleichung beschreiben,

$$\frac{1}{\eta} = C e^{-\frac{E_A}{RT}}. \quad (2)$$

Dabei ist  $C$  eine systemabhängige Konstante,  $E_A$  die molare Aktivierungsenergie,  $R$  die universelle Gaskonstante und  $T$  die absolute Temperatur. Für den Zusammenhang zwischen der absoluten Temperatur  $T$  in °C und in K (Kelvin) gilt

$$T_K = T_{°C} + 273,15. \quad (3)$$

Mit Hilfe dieses Zusammenhangs lässt sich zeigen, dass  $\Delta T_{°C} = \Delta T_K$ . Gleichung (2) ist zu einer Geradengleichung  $y = a \cdot x + b$  umformbar,

$$\ln(\eta) = \frac{E_A}{R} \cdot \frac{1}{T} - \ln(C). \quad (4)$$

Aus der Steigung der Geraden  $\ln(\eta(\frac{1}{T}))$  ist die molare Aktivierungsenergie bestimmbar,

$$E_A = R \cdot a. \quad (5)$$

## 5 Durchführung (im Praktikum)

### 5.1 Inbetriebnahme der Apparatur

Die Apparatur ist bereits aufgebaut. Überprüfen Sie anhand der Libellen, ob die Viskosimeter gerade stehen. Korrigieren Sie falls nötig die Höhe der Füße. Danach dürfen Sie das Gerät nicht mehr auf dem Tisch verschieben. Zur Inbetriebnahme drehen Sie den Regler des Thermostates auf 25 °C und betätigen den Schalter auf der Vorderseite des Gerätes. Bei einer größeren Temperatur als der aktuellen Einstellung am Thermostat schaltet sich die Heizfunktion automatisch ab und läuft erst wieder an, wenn die Temperatur gesunken ist. Wie zuvor beschrieben (siehe Abschnitt 3), können Sie in der Regel in beide Fallrichtungen messen.

#### **Achtung:**

*Sollten sich Luftblasen in der Apparatur befinden, welche die Kugel in einer Fallrichtung beeinflussen, kontaktieren Sie Ihre Versuchsassistenz. **Versuchen Sie auf keinen Fall die Apparatur zu öffnen!***

*Beachten Sie bitte unbedingt die Viskosimeter nach Abschluss der Versuchs jeweils mit dem Pfeil für die kalibrierte Fallrichtung **nach unten** zu hinterlassen (siehe Abb. 2). Diese Einstellung, bei welcher der Pfeil nach unten zeigt, ist auch notwendig, während auf Temperaturänderungen gewartet wird, also zwischen den Messungen bei verschiedenen Temperaturen.*

### 5.2 Messung der Fallzeit der Kugel

Führen Sie die folgenden Messungen für Wasser und Glycerin durch. Nutzen Sie Tabelle 1 um Ihre Messwerte zu notieren.

- **Zeitmessung:**

Die Zeitmessung (bspw. per Mobiltelefon) wird gestartet wenn der untere Kugelrand die obere Markierung im Fallrohr passiert und gestoppt, wenn er die untere Markierung passiert. Achten Sie darauf, dass Sie parallaxenfrei messen. Messen Sie die Fallzeit für die jeweils aktuelle Temperatur fünfmal.

- **Bestimmung der Temperaturabhängigkeit:**

Die Temperatur wird am elektronischen Thermometer abgelesen. Nachdem an *allen* Aufbauten bei der aktuellen Temperatur fünf Zeitmesswerte aufgenommen wurden stellen Sie am Thermostat die nächste Temperatur ein. (Die Aufbauten werden von der gleichen Wasserversorgung gespeist.) Achten Sie darauf, die Aufbauten während einer Temperaturänderung mit dem Pfeil nach unten auszurichten. Nun dauert es ca. 10–15 min bis sich die Temperatur der Testflüssigkeit an diese angeglichen hat. Fangen Sie also nicht voreilig mit den Messungen nach einer Temperaturänderung an, selbst wenn das Thermometer bereits die gewünschte Temperatur anzeigt, sondern warten Sie noch ein paar Minuten.

Führen Sie die Fallzeitmessung für fünf verschiedene Temperaturen zwischen 25 °C und 50 °C durch<sup>2</sup>. Da die Temperatur  $T$  häufig selbst bei konstanter Einstellung schwankt,

---

<sup>2</sup>Sollte die Temperatur bedingt durch die Raumtemperatur bereits über 25 °C liegen, starten Sie Ihre Messungen bei der entsprechend höheren Temperatur.

notieren Sie für jede Fallzeit einen eigenen Temperaturwert. Wenn Sie Tabelle 1 vollständig ausfüllen, sollten Sie alle benötigten Messwerte, inklusive der Messungenauigkeiten, haben.

### 5.3 Wichtige Anmerkungen zum Aufbau



**Abbildung 2:** Korrekte Einstellung der Viskosimeter während sich Temperaturänderungen einstellen und außerhalb der Versuchsdurchführung, also auch beim Verlassen des Versuchsaufbaus.

In Abb. 2 sehen Sie die korrekte Einstellung für die Viskosimeter, beispielsweise während Sie auf Temperaturänderungen warten oder wenn Sie den Versuch beendet haben und den Aufbau verlassen.

Bei anderer Verwendung als beschrieben besteht die Gefahr, dass störende Luftblasen in den Zylinder mit der Messflüssigkeit geraten und /oder die Kugel an einem Ende (*hier: oben*) hängen bleiben könnte. Dies liegt an den unterschiedlichen Enden der Aufbauten bei den Schraubdeckeln, da sich auf einer Seite spezielle, mit Kapillaren versehene Hohlraumdeckel befinden. Vermeiden Sie daher unbedingt an den Schraubdeckeln zu drehen.



## 6 Auswertung (zu Hause)

In diesem Abschnitt werten Sie Ihre Messwerte aus. Folgen Sie dazu den nachfolgenden Anweisungen und füllen Sie die entsprechenden Stellen aus. Allgemeine Hinweise zu den hier benötigten Fehlerrechnungen finden Sie auch im Anhang in Abschnitt 9.2. Beachten Sie die korrekte Angabe von Ergebnissen, wozu das Runden bis auf signifikante Stellen zählt.

### 6.1 Bestimmung der mittleren Fallzeit

Erfahrungsgemäß schwanken die Werte einer Temperatur  $T$  etwas, selbst wenn eine konstante Temperatur eingestellt wurde. Aus diesem Grund haben Sie zu jeder Fallzeit einen eigenen Temperaturwert notiert. Nun gilt es aus diesen fünf Werten der jeweils (möglichst) konstanten Temperatur die Mittelwerte zu bilden, sowohl für die Temperatur, als auch für die dazugehörige Fallzeit. Nutzen Sie dafür die Formeln des Mittelwerts und dessen Standardabweichung (vgl. Abschnitt 9.2.4). Übertragen auf die hier gesuchten Werte ergeben sich die Formeln:

$$\begin{array}{ll} \bar{T} = & \Delta\bar{T} = \\ \underline{\hspace{10em}} & \underline{\hspace{10em}} \\ \\ \bar{t} = & \Delta\bar{t} = \\ \underline{\hspace{10em}} & \underline{\hspace{10em}} \end{array}$$

**Hinweis:** Sollten alle Werte  $T$  für eine Temperatur gleich sein, so ergibt sich bei der Standardabweichung des Mittelwerts einfach 0. Insbesondere in diesem Fall, aber auch wenn der Wert der Standardabweichung extrem klein ist, ist es sinnvoll auf die Messungenauigkeit  $\Delta T$  zurückzugreifen. Da  $N = 5$  Messungen vorliegen können Sie den Fehler des Mittelwerts anpassen,  $\Delta\bar{T} = \frac{\Delta T}{\sqrt{N}}$ .

Unter Beachtung dieser Vorgaben, füllen Sie Tabelle 2 aus.

### 6.2 Temperaturabhängigkeit der Viskosität

Als nächsten Schritt gilt es die mittleren Temperaturen von  $^{\circ}\text{C}$  in  $\text{K}$  umzurechnen. Nutzen Sie Gaußsche Fehlerfortpflanzung (vgl. Abschnitt 9.2.2) und  $T_{\text{K}} = T_{^{\circ}\text{C}} + 273,15$  (Gl. (3)) um zu zeigen, dass  $\Delta T_{^{\circ}\text{C}} = \Delta T_{\text{K}}$ :

	Wasser		Glycerin	
Messung	$\bar{T}$ [°C]	$\Delta\bar{T}$ [°C]	$\bar{T}$ [°C]	$\Delta\bar{T}$ [°C]
1				
2				
3				
4				
5				
Messung	$\bar{t}$ [s]	$\Delta\bar{t}$ [s]	$\bar{t}$ [s]	$\Delta\bar{t}$ [s]
1				
2				
3				
4				
5				

**Tabelle 2:** Mittlere Temperaturwerte und die jeweils dazugehörigen mittleren Fallzeiten.

Mit diesem Wissen können Sie nun Tabelle 3 ausfüllen.

	Wasser		Glycerin	
Messung	$\bar{T}_i$ [K]	$\Delta\bar{T}_i$ [K]	$\bar{T}_i$ [K]	$\Delta\bar{T}_i$ [K]
1				
2				
3				
4				
5				

**Tabelle 3:** Mittlere Temperaturwerte umgerechnet von °C nach K.

Für jede Temperatur gilt es nun einen Viskositätswert zu bestimmen. Benutzen Sie dafür  $\eta = K(\rho_k - \rho_f)\bar{t}$  (Gl. (1)) zusammen mit den vorgegebenen Daten aus Tabelle 4. Zeigen

Sie, dass sich der Fehler der Viskosität als  $\Delta\eta = K (\rho_k - \rho_f) \Delta\bar{t}$  ergibt:

Füllen Sie damit Tabelle 5 aus.

Flüssigkeit	Kugelkonstante $K$ $\left(\frac{\text{mPa cm}^3}{\text{g}}\right)$	Kugeldichte $\rho_k$ $\left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$	Flüssigkeitsdichte $\rho_f$ $\left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$
Glycerin	0,10658	8,124	1,1866
H <sub>2</sub> O dest.	0,01180	2,221	0,9982

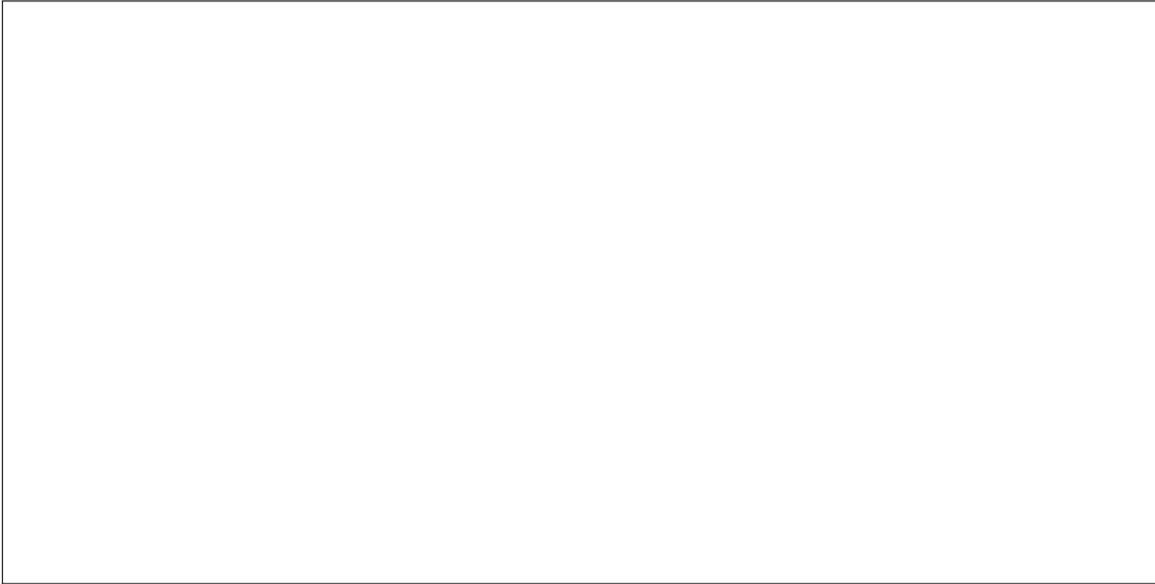
**Tabelle 4:** Flüssigkeits- und viskosimeterspezifische Daten (bei 20°C). Beachten Sie, dass die Kugelkonstanten für die Fallstrecke der oberen bis zur unteren Markierung vorgegeben sind.

Messung	Wasser		Glycerin	
	$\eta$ [mPa s]	$\Delta\eta$ [mPa s]	$\eta$ [mPa s]	$\Delta\eta$ [mPa s]
1				
2				
3				
4				
5				

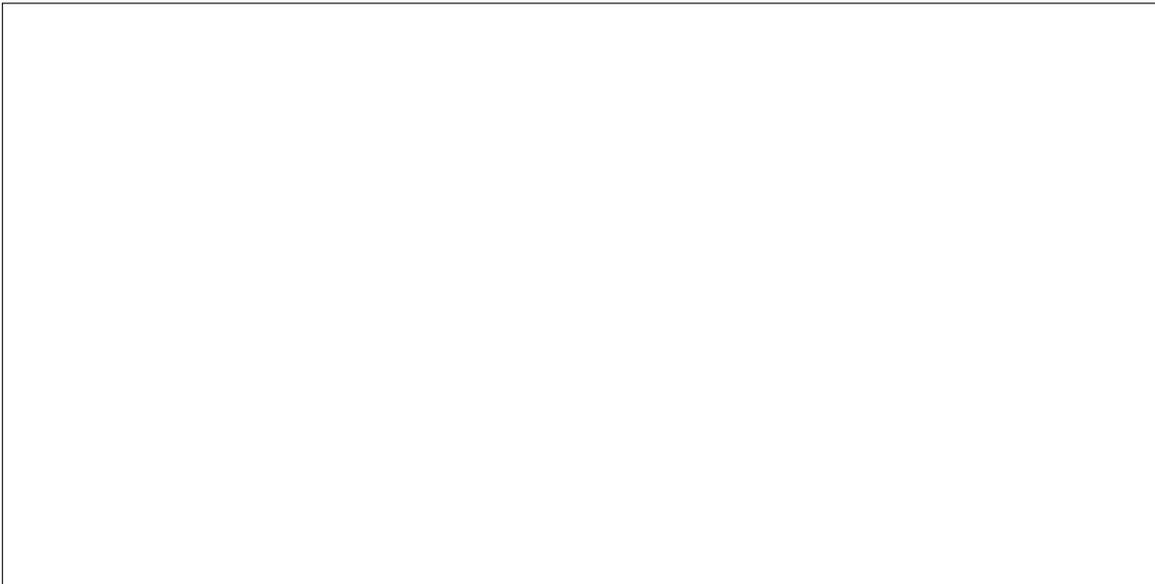
**Tabelle 5:** Viskositätswerte und deren Ungenauigkeiten.

Um auf die Arrhenius-Gleichung in Geradenform  $\ln(\eta) = \frac{E_A}{R} \cdot \frac{1}{T} - \ln(C)$  (Gl. (4)) zu kommen, ist es notwendig weitere Umrechnungen vorzunehmen. Erneut ist die Anwendung von Gaußscher Fehlerfortpflanzung für die entsprechenden Fehlerformeln notwendig. Nutzen

Sie diese um zunächst  $\Delta \frac{1}{T} = \left| -\frac{\Delta T}{T^2} \right|$  zu zeigen:



Zeigen Sie auch  $\Delta \ln \eta = \frac{\Delta \eta}{\eta}$ :



Mit diesem Wissen lassen sich nun alle notwendigen Werte für die Darstellung der Messwerte in Form einer Geraden bestimmen. Nutzen Sie die Fehlerformeln, die Sie gerade nachgewiesen haben, und füllen Sie damit Tabellen 6 und 7 aus. Beachten Sie den sinnvollen Einsatz von Zehnerpotenzen.

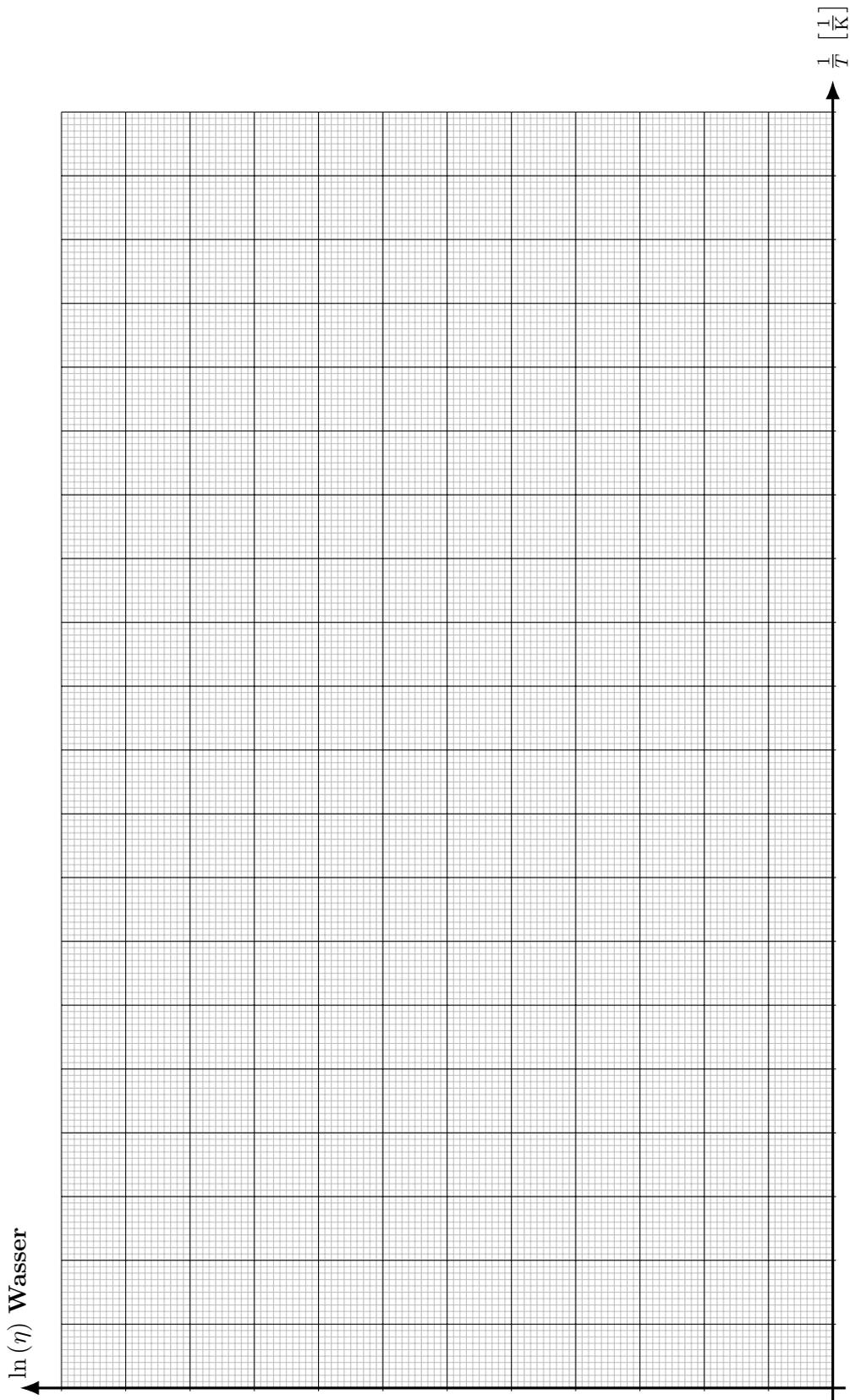
Nun liegen alle Werte vor um die Arrhenius-Gleichung als Gerade  $\ln(\eta) = \frac{E_A}{R} \cdot \frac{1}{T} - \ln(C)$  (Gl. (4)) grafisch umzusetzen. Die grafischen Auftragungen dieser Werte für beide Flüssigkeiten sollen in den Abbildungen 3 und 4 vorgenommen werden. Denken Sie daran Fehlerbalken einzuzeichnen.

Messung	Wasser		Glycerin	
	$\frac{1}{T}$ [ $\frac{1}{K}$ ]	$\Delta\frac{1}{T}$ [ $\frac{1}{K}$ ]	$\frac{1}{T}$ [ $\frac{1}{K}$ ]	$\Delta\frac{1}{T}$ [ $\frac{1}{K}$ ]
1				
2				
3				
4				
5				

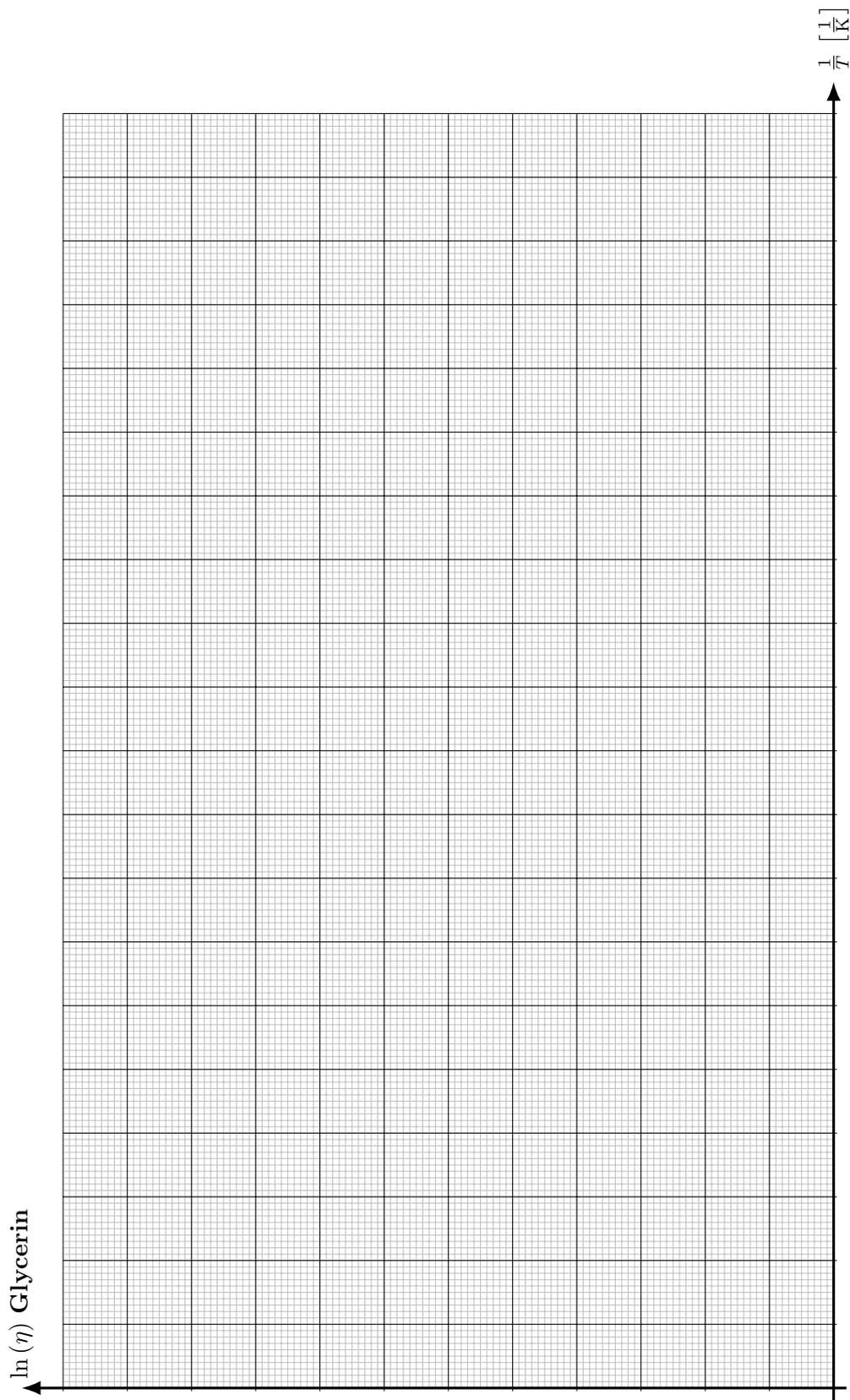
**Tabelle 6:** Kehrwerte der (mittleren) absoluten Temperaturen und deren Ungenauigkeiten.

Messung	Wasser		Glycerin	
	$\ln \eta$	$\Delta \ln \eta$	$\ln \eta$	$\Delta \ln \eta$
1				
2				
3				
4				
5				

**Tabelle 7:** Logarithmische Werte der Viskosität und deren Ungenauigkeiten.



**Abbildung 3: Wasser** – Grafische Auftragung von  $\ln(\eta)$  in Abhängigkeit des Kehrwerts der Temperatur  $\frac{1}{T}$ . Nutzen Sie eine sinnvolle Achsenaufteilung, wobei Sie den jeweiligen Wertebereich beachten sollten. (Die Achsen müssen nicht zwingensweise den Wert 0 auf der anderen Achse markieren!)



**Abbildung 4: Glycerin** – Grafische Auftragung von  $\ln(\eta)$  in Abhängigkeit des Kehrwerts der Temperatur  $\frac{1}{T}$ . Nutzen Sie eine sinnvolle Achsenaufteilung, wobei Sie den jeweiligen Wertebereich beachten sollten. (Die Achsen müssen nicht zwingensweise den Wert 0 auf der anderen Achse markieren!)

### 6.3 Bestimmung der molaren Aktivierungsenergie

Führen Sie zu den zuvor in Abschnitt 6.2 bestimmten Datenpunkten, welche Sie in den Abbildungen 3 und 4 aufgetragen haben, jeweils eine rechnerische Geradenanpassung durch. Hinweise zum Vorgehen dabei finden Sie im Anhang in Abschnitt 9.2.1.

Übertragen Sie die Notation aus dem Anhang auf die Datenpunkte hier. Welche Größe entspricht dann  $x$ , welche  $y$ ?

$$x \hat{=} \underline{\hspace{2cm}} \quad \& \quad y \hat{=} \underline{\hspace{2cm}}$$

Füllen Sie Tabellen 8 und 9 aus. Beachten Sie erneut den sinnvollen Einsatz von Zehnerpotenzen. Machen Sie sich Gedanken darüber, welche Einheiten die folgenden Größen haben (müssen), damit sich später für die gesuchte Aktivierungsenergie die korrekte Einheit ergibt:

$$[x] = \underline{\hspace{2cm}} \quad ; \quad [a] = \underline{\hspace{2cm}}$$

Wasser				
Messung $i$	$x_i$	$x_i^2$	$y_i$	$x_i y_i$
1				
2				
3				
4				
5				
$\sum_i$				

$$\Rightarrow \left[ \Delta \right] \left[ \quad \right] \left[ a \right] \left[ \quad \right] \left[ b \right] \left[ \quad \right]$$

Messung $i$	$y(x_i) = a \cdot x_i + b$	$y(x_i) - y_i$	$(y(x_i) - y_i)^2$
1			
2			
3			
4			
5			
$\sum_i$			

$$\Rightarrow \left[ (\Delta y)^2 \right] \left[ \quad \right] \left[ \Delta a \right] \left[ \quad \right] \left[ \Delta b \right] \left[ \quad \right]$$

**Tabelle 8:** Rechnerische Geradenanpassung für Wasser.

Glycerin				
Messung $i$	$x_i$	$x_i^2$	$y_i$	$x_i y_i$
1				
2				
3				
4				
5				
$\sum_i$				

$$\Rightarrow \Delta \quad \quad \quad a \quad \quad \quad b$$

Messung $i$	$y(x_i) = a \cdot x_i + b$	$y(x_i) - y_i$	$(y(x_i) - y_i)^2$
1			
2			
3			
4			
5			
$\sum_i$			

$$\Rightarrow (\Delta y)^2 \quad \quad \quad \Delta a \quad \quad \quad \Delta b$$

**Tabelle 9:** Rechnerische Geradenanpassung für Glycerin.

Zeichnen Sie nun jeweils die Gerade entsprechend der hier vorgegebenen Geradengleichung

$$\ln(\eta) = a \cdot \frac{1}{T} + b \quad (6)$$

für beide Flüssigkeiten in die jeweilige Abbildung ein. Zum Einzeichnen wählen Sie für jede Gerade zwei beliebige Punkte, welche sich am besten einmal möglichst weit links und einmal möglichst weit rechts auf der  $x$ -Achse innerhalb des Wertebereiches Ihrer Abbildung befinden. Berechnen Sie mit den zuvor bestimmten Parametern  $a$  und  $b$  jeweils zwei solche Punkte:

Wasser:	P <sub>1</sub> (                         )	P <sub>2</sub> (                         )
Glycerin:	P <sub>1</sub> (                         )	P <sub>2</sub> (                         )

Machen Sie diese Punkte in den Abbildungen kenntlich und zeichnen Sie die dazugehörigen Geraden ein, indem Sie die beiden Punkte verbinden. Haben Sie die Geraden eingezeichnet, dann lässt sich direkt erkennen, ob die Geraden zumindest ungefähr zu den Datenpunkten passen. Falls nicht, so haben Sie sich bei der Bestimmung der Geraden verrechnet und Sie müssen Ihre Berechnungen überprüfen und korrigieren.

Rufen Sie sich nun ins Gedächtnis warum Sie die Steigung der beiden Geraden überhaupt bestimmen sollten. Welcher Term in  $\ln(\eta) = \frac{E_A}{R} \cdot \frac{1}{T} - \ln(C)$  (Gl. (4)) entspricht der Steigung  $a$ ?

$$a = \underline{\hspace{4cm}}$$

Die Größe von Interesse ist die Aktivierungsenergie  $E_A$ . Formen Sie den obigen Ausdruck der Steigung nach dieser um:

$$E_A = \underline{\hspace{4cm}}$$

Nutzen Sie Gleichung (5) als Referenz um Ihr Ergebnis zu überprüfen. Der Fehler der Aktivierungsenergie ergibt sich aus  $\Delta E_A = R \cdot \Delta a$ . Beweisen Sie dies:

Es liegen nun alle notwendigen Formeln vor. Nutzen Sie zur Rechnung  $R \approx 8,314463 \frac{\text{J}}{\text{molK}}$  <sup>(3)</sup>. Welche Einheit muss dann die Aktivierungsenergie haben?

$$[E_A] = \underline{\hspace{2cm}} \quad (7)$$

Füllen Sie nun Tabelle 10 aus.

	Wasser	Glycerin
$E_A$		
$\Delta E_A$		

**Tabelle 10:** Aktivierungsenergien und deren Ungenauigkeiten für beide Flüssigkeiten. Die Einheit der Werte hier ist in Gleichung (7) angegeben.

---

<sup>3</sup>Im Jahr 2019 wurden einige Konstanten des Internationalen Einheitensystems (SI) neu definiert (vgl. <https://www.bipm.org/en/publications/si-brochure/>). Da sich die universelle Gaskonstante aus Konstanten ergibt, deren Werte in diesem Zuge exakt festgelegt wurden, ist auch ihr Wert folglich fest definiert als  $R = 8,31446261815324 \frac{\text{J}}{\text{molK}}$ .





## 8 Quellen und weiterführende Literatur

- Fehlerrechnung und allgemeine Hinweise:  
<https://www.astro.uni-koeln.de/AP/>
- Meschede, Gerthsen Physik, Springer Berlin Heidelberg, 25. Aufl. 2015. Neuauflage 2015  
<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-45977-5>  
[Zugang aus dem Netz der Uni Köln (UKLAN) möglich]
- Bergmann und Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 1, “Mechanik, Akustik, Wärme”, Boston: De Gruyter, 9., verb. Aufl. Reprint 2018  
<https://doi.org/10.1515/9783111628882>  
[Zugang aus dem Netz der Uni Köln (UKLAN) möglich]
- Walcher, Elbel und Fischer: Praktikum der Physik, Vieweg + Teubner

## Feedback

Hier ist nach Ihrem Feedback zu dieser Anleitung gefragt. Gibt es etwas, das Sie an der Versuchsanleitung inhaltlich oder technisch ändern würden? Ist beispielsweise etwas nicht oder unzureichend erklärt, Lücken zu klein, etc.? Änderungsvorschläge könnten schon für die nächsten Praktikumsteilnehmer umgesetzt werden.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## 9 Anhang

### 9.1 Herleitungen und weiterführende Anmerkungen

#### 9.1.1 Fallzeitabschätzung nach dem Stokesschen Gesetz

Wir betrachten eine Kugel mit Radius  $r_k$ , die in einer Flüssigkeit der Viskosität  $\eta$  mit Geschwindigkeit  $v_k$  fällt. Die Kugel wird dabei von der Flüssigkeit mit der Stokesschen Reibungskraft gebremst,

$$F_R = -6\pi\eta v_k r_k. \quad (8)$$

Gleichzeitig erfährt die Kugel durch die Flüssigkeit die Auftriebskraft,

$$F_A = -\rho_f V_k g.$$

Diese wird bestimmt durch die Dichte der Flüssigkeit  $\rho_f$ , die Erdbeschleunigung  $g$  und das Volumen der Kugel,

$$V_k = \frac{4}{3}\pi r_k^3.$$

Außerdem unterliegt sie natürlich der Erdanziehung

$$F_G = \rho_k V_k g.$$

Dabei ist  $\rho_k$  die Dichte der Kugel. Die Gesamtkraft auf die Kugel ist also

$$\begin{aligned} F_{\text{ges}} &= F_G + F_A + F_R \\ &= (\rho_k - \rho_f) \frac{4}{3}\pi r_k^3 g - 6\pi\eta v_k r_k. \end{aligned} \quad (9)$$

Da im stationären Zustand (also nach Erreichen der Endgeschwindigkeit) die Gesamtkraft gleich Null sein muss, lässt sich aus Gleichung (9) die Zeit  $t$  bestimmen, die die Kugel benötigt, um eine definierte Strecke  $h$  mit der Geschwindigkeit  $v_k = \frac{h}{t}$  zurückzulegen.

$$6\pi\eta v_k r_k = (\rho_k - \rho_f) \frac{4}{3}\pi r_k^3 g \quad (10)$$

$$\Leftrightarrow \frac{h}{t} = \frac{(\rho_k - \rho_f) \frac{4}{3}\pi r_k^3 g}{6\pi\eta r_k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{h}{t} = \frac{2r_k^2 g}{9\eta} (\rho_k - \rho_f)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{9\eta h}{2r_k^2 g (\rho_k - \rho_f)} \quad (11)$$

#### 9.1.2 Ladenburgkorrektur

Die vorangegangene Rechnung nach Stokes geht davon aus, dass die Flüssigkeit unendlich ausgedehnt ist, was in der Realität natürlich nicht gegeben ist. Mit der Ladenburgkorrektur wird genau dies berücksichtigt. Dafür wird die Reibungskraft aus Gleichung (8) modifiziert,

$$\tilde{F}_R = F_R \cdot \left(1 + 2,1 \frac{r_k}{R}\right).$$

Dabei ist  $R$  der Radius des Fallrohrs. Dadurch ändert sich Gleichung (10) zu

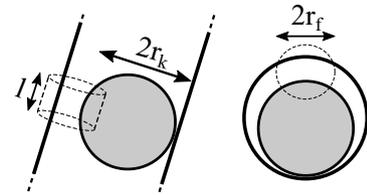
$$\begin{aligned} 6\pi\eta v_k r_k \left(1 + 2,1 \frac{r_k}{R}\right) &= (\rho_k - \rho_f) \frac{4}{3} \pi r_k^3 g \\ \Leftrightarrow t &= \frac{9\eta \left(1 + 2,1 \frac{r_k}{R}\right) h}{2r_k^2 g (\rho_k - \rho_f)}. \end{aligned} \quad (12)$$

### 9.1.3 Fallzeitabschätzung nach dem Hagen-Poiseuilleschen Gesetz

Nach dem Gesetz von Hagen und Poiseuille ist die mittlere Fließgeschwindigkeit  $\bar{v}_f$  einer Flüssigkeit der Viskosität  $\eta$  in einem Zylinder der Länge  $l$  und des Radius  $r_f$  unter dem Druck  $p$  gegeben durch

$$\bar{v}_f = \frac{p r_f^2}{8\eta l}.$$

In unserem Fall müsste die Flüssigkeit eigentlich die sichelförmige Fläche zwischen Kugel und Rohrwand durchfließen, die sicherlich kein Zylinder ist. Aufgrund der Reibung der Flüssigkeitsmoleküle an Kugel und Wand wird aber nur der breiteste Bereich der Sichel hohe Fließgeschwindigkeiten zulassen. Diesen Bereich nähern wir durch einen Zylinder mit Radius  $r_f$  und Länge  $l$  an. Die nebenstehende Abbildung veranschaulicht das beschriebene Prinzip und wie die einzelnen Größen hier Anwendung finden.



Der antreibende Druck ist hier verursacht durch die sinkende Kugel. Er ergibt sich also als ihre Gewichtskraft reduziert um den Auftrieb durch die Flüssigkeit, die auf die Querschnittsfläche der Kugel wirkt,

$$p = \frac{F_G - F_A}{\pi r_k^2} = \frac{(\rho_k - \rho_f) \frac{4}{3} \pi r_k^3 g}{\pi r_k^2} = \frac{4}{3} (\rho_k - \rho_f) r_k g.$$

Wir müssen berücksichtigen, dass die Flüssigkeit sehr viel schneller fließen wird als die Kugel sinkt, da die durchströmte Fläche sehr viel kleiner ist als der Querschnitt der Kugel. Die Geschwindigkeit der Kugel ergibt sich dann als

$$\begin{aligned} v_k &= \bar{v}_f \frac{\pi r_f^2}{\pi r_k^2} \\ &= \frac{\frac{4}{3} (\rho_k - \rho_f) r_k g r_f^2}{8\eta l} \cdot \frac{r_f^2}{r_k^2} \\ &= \frac{(\rho_k - \rho_f) g r_f^4}{6\eta l r_k}. \end{aligned}$$

Für die Fallzeit ergibt sich damit

$$t = \frac{6\eta l r_k h}{r_f^4 g (\rho_k - \rho_f)}. \quad (13)$$

### 9.1.4 Kugelkonstante

In den drei Gleichungen für die Fallzeiten (Gleichungen (11), (12) und (13)) lässt sich ein grundsätzlicher Zusammenhang erkennen:

$$\eta = K(\rho_k - \rho_f)t.$$

Die Kugelkonstante  $K$  fasst in diesem Fall alle Faktoren, bis auf Dichten und Fallzeit, zusammen. Insbesondere ist erkennbar, dass  $K$  antiproportional von der Fallstrecke  $h$  abhängt, also  $K \sim \frac{1}{h}$ .

Je nach Betrachtungsweise können die Resultate sehr unterschiedlich ausfallen. Keine der erwähnten Betrachtungsweisen berücksichtigt alle Effekte, die hier eine Rolle spielen, sodass alle Fälle nur Näherungen darstellen, wenn auch von sehr unterschiedlicher Qualität. Um das Kugelfallviskosimeter zur genauen Bestimmung von Viskositäten nutzen zu können, ist es daher wichtig, die Kugelkonstante sehr genau zu kennen. Die sicherste Methode dafür ist es, das Viskosimeter mit einer Flüssigkeit zu kalibrieren, deren Viskosität sehr gut bekannt ist. Diese Aufgabe würde allerdings den Aufwand für einen Praktikumsversuch zu sehr in die Höhe treiben, weshalb die Kugelkonstanten für jeden Versuchsaufbau in dieser Anleitung in Tabelle 4 angegeben sind.

## 9.2 Fehler(formeln) und Geradenanpassung

### 9.2.1 Rechnerische Geradenanpassung

Die allgemeine Form einer Geradengleichung lautet

$$y = y(x) = a \cdot x + b.$$

Für einen Datensatz von Werten  $x_i$  und  $y_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) lässt sich nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate eine entsprechende Geradengleichung finden. Anders ausgedrückt, es werden die Parameter  $a$  und  $b$  der Geraden so bestimmt, dass die Abweichungen zwischen den Werten und der Gerade minimal sind. Es ist sinnvoll für die Berechnung eigene Ausdrücke zu definieren:

$$\begin{aligned} [x] &= \sum_{i=1}^N x_i & [y] &= \sum_{i=1}^N y_i \\ [xx] &= \sum_{i=1}^N x_i^2 & [xy] &= \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i \\ \Delta &= N \cdot [xx] - [x] \cdot [x] \\ \Rightarrow a &= \frac{N \cdot [xy] - [x] \cdot [y]}{\Delta} & \& \quad b &= \frac{[xx] \cdot [y] - [x] \cdot [xy]}{\Delta}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist es möglich, und in der Regel notwendig, die Ungenauigkeiten von  $a$  und  $b$  zu bestimmen, also die Werte  $\Delta a$  und  $\Delta b$ . Erneut werden passende Ausdrücke definiert:

$$\begin{aligned} (\Delta y)^2 &= \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y(x_i) - y_i)^2 & \text{für } y(x_i) &= a \cdot x_i + b \\ \Rightarrow \Delta a &= \sqrt{(\Delta y)^2 \frac{N}{\Delta}} & \& \quad \Delta b &= \sqrt{(\Delta y)^2 \frac{[xx]}{\Delta}}. \end{aligned}$$

## 9.2.2 Gaußsche Fehlerfortpflanzung

Die Gaußsche Fehlerfortpflanzung beschreibt den Einfluss fehlerbehafteter Größen  $x_i$  auf die Ungenauigkeit einer sich aus diesen zusammensetzenden Größe  $y$ . Als ein verallgemeinertes Beispiel ist der Wert von  $y$  mit dessen Ungenauigkeit  $\Delta y$  zu bestimmen. Der Wert  $y$  hängt von mehreren anderen Größen  $x_i$  ab,  $y(x_1, x_2, x_3, \dots)$ .

Alle Größen  $x_1, x_2, x_3, \dots$  besitzen jeweils eine Ungenauigkeit  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots$ . Dann ergibt sich  $\Delta y$  aus

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_3} \Delta x_3\right)^2 + \dots},$$

wobei die Brüche  $\frac{\partial y}{\partial x_i}$  partiellen Ableitungen von  $y$  nach einer Größe  $x_i$  entsprechen.

### Ein Beispiel:

Um die Geschwindigkeit  $v = \frac{l}{t}$  eines Fahrzeugs in einer Tempo 30-Zone zu bestimmen wird die Zeit  $t$  gestoppt, welche es für eine Strecke  $l$  benötigt. Beide Werte liegen vor:  $l = (20,0 \pm 0,5) \text{ m}$  und  $t = (2,2 \pm 0,2) \text{ s}$ , also  $v = \frac{20,0 \text{ m}}{2,2 \text{ s}} \approx 9,0909 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Die Fehlerformel lautet hier

$$\begin{aligned} \Delta v &= \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial l} \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \Delta t\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{t} \Delta l\right)^2 + \left(-\frac{l}{t^2} \Delta t\right)^2} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\left(\frac{l}{t} \cdot \frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{l}{t} \cdot -\frac{\Delta t}{t}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{l}{t}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + (-1)^2 \cdot \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2\right)} \\ &= v \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Die Umformungen bis Gleichung (15) sind als generelle Vorlage zu verstehen, verglichen mit Gleichung (14) ist in diesem Beispiel keine starke Vereinfachung zu beobachten. In einigen Fällen ist dieses Schema jedoch sehr sinnvoll, insbesondere wenn dadurch lange Formeln letztendlich stark gekürzt werden. Allerdings ist zu beachten, dass es nicht auf alle Formeln anwendbar und somit jeder Fall einzeln abzuwägen ist.

Hier ergibt sich durch Einsetzen der Werte  $\Delta v \approx 0,857 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Gerundet und mit umgerechneten Einheiten ist letztendlich  $v \pm \Delta v = (9,1 \pm 0,9) \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx (33 \pm 3) \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .

## 9.2.3 Start-Stopp-Fehler

Der Start-Stopp-Fehler beschreibt die Messungenauigkeit einer Zeitmessung. Im Praktikum werden Zeitmessungen meist per Hand vorgenommen, deren Genauigkeit von der messenden

Person abhängt. Der Fehler ergibt sich, wie der Name bereits impliziert, aus der Ungenauigkeit der Messung sowohl beim Starten als auch beim Stoppen der Messung.

In der Regel wird einfach die gestoppte Zeit  $t_{\text{Stopp}}$  als Messzeit  $t$  genutzt, also  $t = t_{\text{Stopp}}$ . Streng genommen ergibt sich diese allerdings aus  $t = t_{\text{Stopp}} - t_{\text{Start}}$ , wobei meistens  $t_{\text{Start}} = 0$ , für eine beliebige Einheit, gegeben ist.

Dieser Punkt ist bei der Betrachtung der Fehler relevant, da wie oben beschrieben beide Größen fehlerbehaftet sind. Durch Anwendung von Gaußscher Fehlerfortpflanzung ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta t &= \sqrt{\left(\frac{\partial t}{\partial t_{\text{Start}}}\Delta t_{\text{Start}}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial t_{\text{Stopp}}}\Delta t_{\text{Stopp}}\right)^2} \\ &= \sqrt{(-1 \cdot \Delta t_{\text{Start}})^2 + (1 \cdot \Delta t_{\text{Stopp}})^2} \\ &= \sqrt{\Delta t_{\text{Start}}^2 + \Delta t_{\text{Stopp}}^2}.\end{aligned}$$

Es ist sinnvoll anzunehmen, dass die Messungenauigkeiten beim Starten und Stoppen gleich sind, also  $\Delta t_S = \Delta t_{\text{Start}} = \Delta t_{\text{Stopp}}$ . Somit folgt

$$\Delta t = \sqrt{2 \cdot \Delta t_S^2} = \sqrt{2} \cdot \Delta t_S.$$

Die Reaktionszeit hängt von der die Messung durchführenden Person und den Umständen ab. Es ist wichtig zu unterscheiden, ob ein Ereignis völlig überraschend passiert oder ob die Messung gut vorhersehbar ist, wie zum Beispiel periodische Wiederholungen oder lineare (langsame) Bewegungen. Es ist realistisch bei vorhersehbaren Messungen eine tendenziell kleine Reaktionszeit zu wählen, welche die meisten Personen mit den gegebenen Bedingungen erreichen können, also beispielsweise  $\Delta t_S = 0,1\text{s}$ . Für diesen Wert ergibt sich schließlich  $\Delta t \approx 0,14\text{s}$ . Um einen eigenen Wert für  $\Delta t_S$  zu finden ist es also notwendig die Umstände des jeweiligen Versuchs und das eigene Reaktionsvermögen zu beurteilen. Sollten Sie zu der Einschätzung gelangen, eine andere Reaktionszeit zu benötigen, so passen Sie den Wert von  $\Delta t_S$  und entsprechend  $\Delta t$  an.

In diesem Versuch bewegen sich die Kugeln in den Probenflüssigkeiten idealerweise mit einer konstanten Geschwindigkeit, die Bewegung ist somit gut vorhersehbar. Beachten Sie dies bei der Abschätzung Ihrer Reaktionszeit.

## 9.2.4 Der Mittelwert und dessen Standardabweichung

Angenommen es liegen  $n$  Werte  $x_i$  einer Größe  $x$  mit gleicher Ungenauigkeit vor, also  $\Delta x_i = \Delta x$  für alle  $i$  mit  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Dann ergibt sich deren Mittelwert  $\bar{x}$  wie folgt:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Als Fehler wird insbesondere im Zuge dieses Praktikums die Standardabweichung des Mittelwerts genutzt, nicht zu verwechseln mit der Standardabweichung einer Einzelmessung,

deren Formel recht ähnlich ist, auf die hier aber nicht weiter eingegangen wird. Die relevante Formel der Standardabweichung des Mittelwerts, hier als  $\Delta\bar{x}$  bezeichnet, lautet

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Sollte es vorkommen, dass für alle  $i$  gilt  $\bar{x} = x_i$ , so würde der Wert  $\Delta\bar{x}$  verschwinden. In diesem Fall ist eine sinnvolle Alternative die Gaußsche Fehlerfortpflanzung zu nutzen, was zu  $\Delta\bar{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{n}}$  führt, da alle  $x_i$  die gleiche Ungenauigkeit  $\Delta x$  besitzen.

Ist der Mittelwert von nur zwei Werten  $x_1$  und  $x_2$  gesucht, so vereinfacht sich die Formel der Standardabweichung des Mittelwerts drastisch und wir erhalten

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \& \quad \Delta\bar{x} = \left| \frac{x_1 - x_2}{2} \right|.$$

Häufig gilt  $x_2 > x_1$ , sodass  $\Delta\bar{x} = \frac{x_2 - x_1}{2}$ .