I. Physikalisches Institut
Universität zu Köln

M11: Kreisel

Praktikum A für Nebenfächler

Version vom 1. Juli 2020

Abzugeben bis: ____________________

Assistent: ____________________

Gruppenmitglieder: ____________________

____

____

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Kreiselbewegung kommt in vielen Bereichen der Natur vor. In der Mechanik ist sie wichtig für den Diskuswurf, Kreiselkompass (mittlerweile weitesgehend durch GPS er-setzt), moderner Ballistik und Erdrotation. So führt z.B. die Erde unter dem Krafteinfluss der Sonne und des Mondes eine Kreiselbewegung aus, Präzession genannt, bei der die Erdachse in 26000 Jahren einen Kegelmantel beschreibt (das sog. Platonische Jahr. In der mikroskopischen Welt können aber auch Moleküle rotieren und Atome haben einen Eigendrehimpuls (Spin genannt). Das anschauliche Verständnis eines mechanischen Kreiselsystems hilft daher später in der quantenmechanischen Welt z.B die Molekülspektren oder die Kernspin-Resonanz besser zu verstehen.Bei dem Versuch M11 sollen insbesondere die Kreiselbewegungen der Nutation (Kräfte-freie Bewegung) und die Präzession (Bewegung unter Krafteinwirkung) untersucht wer-den. Die Mathematik dazu ist nicht allzu komplex, aber für den Anfänger ist es manch-mal schwierig, die Definitionen und Raumrichtungen des Drehimpulses, der verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten, der Kreiselachse etc. zu unterscheiden. Deshalb ist es bei diesem Versuch wichtig, das experimentelle Phänomen wie ein neugieriges Kind zu beobachten und zu verinnerlichen.

Wichtige Informationen

Zur Bearbeitung ist es zwingend erforderlich dass Sie sich mit den Grundlagen der Fehlerrechnung (Gaußsche Fehlerfortpflanzung, (Gewichteter) Fehler des Mittelwerts, Grafische Geradenanpassung) vertraut machen.
Der Umfang dieses Versuchs macht es nötig, dass sie der Ordnung halber die Blätter mittels Schnellhefter o.ä. binden. Bitte lochen Sie die Blätter und heften Sie sie sorgfältig ein. Sollte die Form der Abgabe nicht den Regularien entsprechen wird die Auswertung durch den Assistenten verweigert werden.
Versuchen Sie innerhalb der vorgegebenen Lücken zu bleiben, diese geben den Umfang vor, der an entsprechender Stelle erwartet wird. sollte der Platz dennoch nicht ausreichen fügen Sie ganze Blätter ein.
Beachten Sie bitte, dass die Lücken und Fragestellungen im Abschnitt 2 vollständig zu beantworten, sowie alle fehlenden Formeln in Abschnitt 7 zu ergänzen sind und am Versuchstag vorgezeigt werden müssen. Es wird davon ausgegangen, dass alle Gruppenmitglieder die vollständige Anleitung durchgelesen und verstanden haben. Sollten Sie am Versuchstag nicht ausreichend auf den Versuch vorbereitet sein, wird die Assistentin/der Assistent Sie nicht am Versuch teilnehmen lassen.

Alle auf dem Deckblatt aufgeführten Gruppenmitglieder sind für die Bearbeitung und fristgerechte Abgabe des Versuchsberichts bzw. dessen erforderlichen Korrekturen zuständig und verantwortlich. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass Sie sich mit den Regeln des A-Praktikums[a] vertraut gemacht haben.

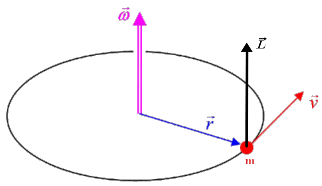
[a] zu finden unter: https://teaching.astro.uni-koeln.de/AP

2 Vorbereitung (zu Hause)

Die folgenden Stichpunkte und theoretischen Überlegungen sind zentrale Bestandteile des Versuchs und sollten grundsätzlich gelernt und verstanden sein. Außerdem sollten Sie in der Lage sein, sie am Versuchstag im Antestat selbstständig wiederzugeben. Literaturhinweise gibt es in Abschnitt 9. Um die Drehbewegungen eines starren Körpers wie das verwendete Gyroskop zu beschreiben, werden im folgenden die Begriffe Winkel ϕ, Winkelgeschwindigkeit ω und Winkelbeschleunigung α bezüglich einer Drehachse verwendet.

2.1 Allgemeine Begriffe

- Der **Drehimpuls** L einer Rotation umschreibt, ähnlich wie der Impuls für die Translation, die "Wucht"der Drehbewegung. Er wird daher gelegentlich auch als Drall oder veraltet Schwung bezeichnet. Der Drehimpuls eines Massenpunktes steht senkrecht auf der Ebene welche durch den Verbindungsvektor des Massenpunktes $\vec{r}$ zur Drehachse und der Geschwindigkeit $\vec{v}$ aufgespannt wird. Mathematisch ausge-



  drückt gilt daher $\vec{L} = m\_\_\_\_\_ \times \_\_\_\_\_$.

- Das **Trägheitsmoment** I ist ein Maß für den Widerstand, den ein Körper einer

  Änderung seiner ______________________________ entgegengesetzt. Das Trägheitsmoment I eines Massenpunktes mit Masse m welcher sich im Abstand r zu einer Drehachse befindet berechnet sich anhand $I = mr^2$. Betrachtet man eine hinreichend System von Massenpunkte welches sich idealisierte Weise nicht verformen lässt spricht man von einem starren Körper. Für einen solchen Körper, der modellhaft aus diskreten Massenpunkten m_i im Abstand r_i zur Drehachse zusammengesetzt ist, gilt bezüglich seines Trägheitsmomentes:

$$I = \sum_i \underline{\hspace{4cm}}$$

- Möchte man das Trägheitsmoment I eines Körpers zu einer bezogen zur Schwerpunktachse parallel verschobenen Drehachse im Abstand a bestimmen so findet der **Satz von Steiner** Anwendung. Nach diesem berechnet sich das Trägheitsmoment anhand von

$$I = I_s + \underline{\hspace{4cm}}$$

  ,wobei I_s+ das Trägheitsmoment des Körpers bezogen auf seine Schwerpunktachse beschreibt.

- Das **Drehmoment** $\vec{M}$ beschreibt die Änderung des Drehimpulses als Resultat einer über den Hebelarm $\vec{r}$ einwirkenden Kraft $\vec{F}$. Mathematisch formuliert gilt daher $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ respektive $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}} = I\ddot{\varphi}$. Das heißt ein Drehmoment $\vec{M}$ ist gleich dem Produkt aus Trägheitsmoment I und Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$. Wirkt in einem abgeschlossenen System kein äußeres Drehmoment so bleibt demnach der Drehimpuls erhalten. Eine sehr ähnliche Gleichung finden wir für Translationsbewegungen im 2. Newtonschen Axiom wieder: $F = ma$. In Analogie dazu nimmt das Drehmoment

  hier die Rolle der __________ ein und das Trägheitsmoment die Rolle der __________.

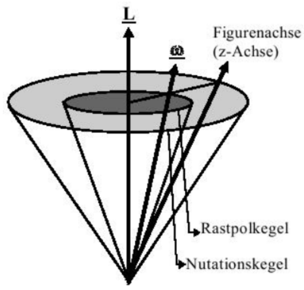
- Als **Hauptträgheitsachsen** eines Körpers versteht man jene Rotationsachsen, um die der Körper fortgesetzt und 'ruhig' rotieren kann, ohne dass die Richtung der Achse durch ein äußeres Drehmoment konstant gehalten werden muss. Hauptträgheitsachsen

  verlaufen daher immer durch den __________ eines Körpers und stehen __________ aufeinander.

2.2 Kräftefreier Kreisel (Nutation)

Ist ein Kreisel, wie er in diesem Versuch verwendet wird, durch das Einjustieren von Kontergewichten im Gleichgewicht, so wirkt auf ihn kein äußeres Drehmoment. Bringt man den

Kreisel nun zum Rotieren, ist in diesem Falle sein __________________ erhalten und steht somit fest im Raum. Im einfachsten Fall zeigen nun der raumfeste Drehimpulsvektor $\vec{L}$, der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ und die Kreiselachse in eine Richtung und der rotiernde Kreisel scheint zu ruhen (ßchlafender"Kreisel).



Gibt man dem Kreisel jedoch einen kleinen seitlichen Stoss, so sind der Drehimpulsvektor und die Figurenachse (Hauptträgheitsachse) nicht mehr parallel. Dies führt dann dazu, dass die Figurenachse und $\vec{\omega}$ nun um den raumfesten

__________________ rotieren. Diese Rotation bezeichnet man als Nutation.

Die Winkelgeschwindigkeit Ω_{Nut} lässt sich anschaulich anhand geschickter grafischer Vektorzerlegung gut bestimmen. Hierzu betrachte man Abbildung 1. Im Ausgangsfall befindet man sich im Fall des **schlafenden Kreisels** bei welchem der Drehimpulsvektor $\vec{L}$ und

die Winkelgeschwindigkeit unserer rotierenden Kreiselscheibe $\vec{\omega}_{fig}$ __________________ zueinander befinden. Durch das Anstoßen der Kreiselachse wird nun die Figurenachse, insofern auch der Winkelgeschwindigkeitsvektor unserer rotierenden Kreiselscheibe $\vec{\omega}_{fig}$, aus

der parallelen Lage heraus gebracht. Aufgrund der __________________ bleibt hierbei

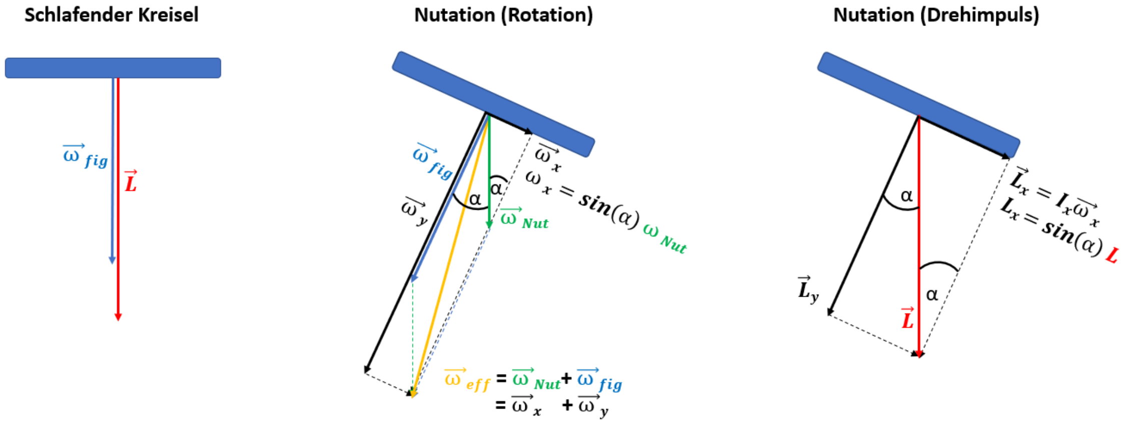


Abbildung 1: *Vektorzerlegung der Winkelgeschwindigkeiten sowie der Drehimpulse im Fall der Nutation*

jedoch die Richtung und Länge unseres ______________________ erhalten. Man erhält dadurch zusätzlich zur Rotation unserer Kreiselscheibe ω_{Fig} nun noch eine Winkelgeschwindigkeitskomponente Ω_{Nut} welche die Rotation der Kreiselachse um den Raumfesten Drehimpuls beschreibt. Effektiv kann man also eine Gesamtwinkelgeschwindigkeit ω_{eff} definieren welche als Summe der einzelnen Vektorkomponenten aufzufassen ist. Analog kann man diesen Winkelgeschwindigkeitsvektor jedoch auch als eine Zusammensetzung der Rotationen um eine Y und eine X-Achse definieren wobei die X-Achse Senkrecht auf dem Winkelgeschwindigkeitsvektor ω_{fig} steht. Der Betrag des letzteren Vektors kann man nun anhand des Betrages der Winkelgeschwindigkeit der Nutation unter Einbeziehung der Neigung α bestimmen. Hierbei gilt:

$$\|\vec{\omega}_x\| = sin(\alpha)\|\vec{\Omega}_{Nut}\| \tag{1}$$

$$sin(\alpha) = \frac{\|\vec{\omega}_x\|}{\|\vec{\Omega}_{Nut}\|} \tag{2}$$

Analog kann man sich auch den Gesamtdrehimpulsvektor $\vec{L}$ in eine X- und eine Y-Komponente aufspalten für welchen daher gilt:

$$\|\vec{L}_x\| = sin(\alpha)\|\vec{L}\| \tag{3}$$

$$sin(\alpha) = \underline{\hspace{6cm}} \tag{4}$$

Letztlich kann man jene X-Komponente des Drehimpulses auch aus dem Produkt aus Winkelgeschwindigkeit ω_x und dem Trägheitsmoment I_x bezüglich der betroffenen Achse berech-

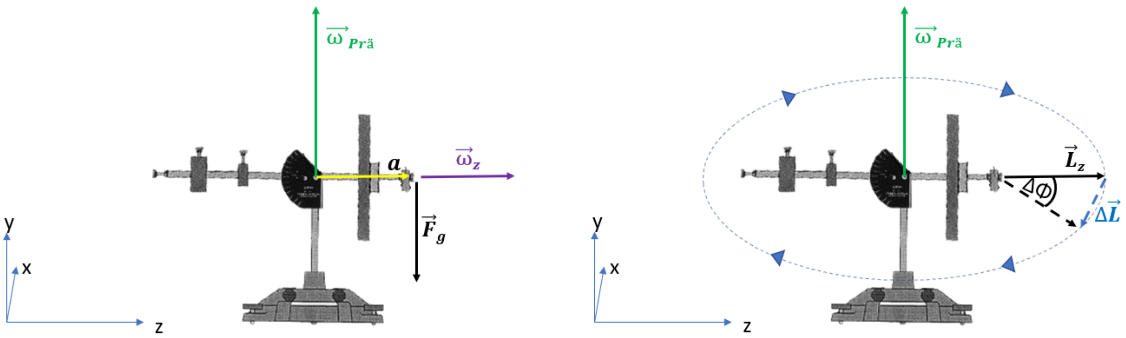


Abbildung 2: *Vektorzerlegung der wirkenden Winkelgeschwindigkeiten, Kräfte bzw. Drehmomente und Drehimpulse im Fall des präzedierenden Kreisels. In der linken Abbildung ist der Angriffspunkt der Gravitationskraft an der Position des Zusatzgewichtes, im Abstand a zur Aufhängung illustriert. Das daraus resultierende Drehmoment M zeigt in diesem Fall in Richtung des Beobachters und sorgt somit für eine Rotation des Kreisels um die Aufhängungsachse mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{Pr} (Präzession).*

nen bestimmen ($\|L_x\| = \|I_x\|\|\omega_x\|$). Aus Gleichungen 4 und 2 lässt sich somit herleiten:

$$sin(\alpha) = \frac{\|\vec{\omega}_x\|}{\|\vec{\Omega}_{Nut}\|} = \frac{\|\vec{L}_x\|}{\|\vec{L}\|} \tag{5}$$

$$\frac{\|\vec{\omega}_x\|}{\|\vec{\Omega}_{Nut}\|} = \frac{\|I_x\|\|\omega_x\|}{\|\vec{L}\|} \tag{6}$$

$$\frac{1}{\|\vec{\Omega}_{Nut}\|} = \frac{\|I_x\|}{\|\vec{L}\|} \tag{7}$$

$$\|\vec{\Omega}_{Nut}\| = \frac{\|\vec{L}\|}{\|I_x\|} \tag{8}$$

2.3 Präzession

Hängt man eine Zusatzmasse m' auf die Figurenachse,so wirkt ein Drehmoment $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{a} \times \vec{F}_g = \vec{a} \times (m'\vec{g})$ auf den Kreisel, wobei $\vec{a}$ der Abstand der Zusatzmasse von dem Aufhänge-

punkt ist und $\vec{g}$ die ______________________ ist. Das Kreuzprodukt aus ______________________ $\vec{g}$ und Hebelarm $\vec{a}$ ist im allgemeinen gegeben durch das Produkt ihrer Beträge multipliziert mit dem Sinus des Öffnungswinkels ϕ, welcher durch beide Vektoren aufgespannt wird: $\vec{a} \times \vec{g} = \|\vec{a}\|\|\vec{g}\|sin(\phi_{a,g})$. Im Fall unseres Versuches greift die Gewichtskraft der Zusatzmasse

______________________ zum Hebelarm $\vec{a}$. Insofern ist der Öffnungswinkel $\phi_{a,g}$ gerade $\frac{\Pi}{2}$ (90°) und das wirkende Drehmoment nun gegeben durch $M = m'ag$. Das wirkende Drehmoment resultiert somit in einer Änderung des Drehimpulses $\Delta\vec{L}$ senkrecht zu Orientierung des ursprünglichen Drehimpulses $\vec{L}$ und führt somit zu einer zusätzlichen Rotation des Kreises um die Achse seiner Aufhängung. Diese Rotation hat einer Winkelgeschwindigkeit $\Omega_{Pr} = \frac{d\Phi}{dt}$

inne welche man ______________________ nennt. Wie in der rechten Skizze von Abbildung 2 illustriert ergibt sich für den Betrag der Änderung ΔL des Drehimpulses aufgrund des wir-

kenden ______________________ $\sin(\Delta\Phi) = \frac{\Delta L}{L_z}$. Betrachtet man infinitesimale Zeiteinheiten dt so folgt für letzteren Zusammenhang $\sin(d\Phi) = \frac{dL}{L_z}$. Hierbei beschreibt nun $d\Phi$ eine infinitesimale Drehung des Kreisels um seine Aufhängung im Zeitintervall dt. Für kleine Winkel gilt ferner näherungsweise dass der Sinus eines Winkels durch den Winkel selbst genähert werden kann. Somit folgt $\sin(d\Phi) \approx d\Phi$ und insofern $d\Phi = \frac{dL}{L_z}$. Betrachtet man nun die ursprüngliche Definition der Winkelgeschwindigkeit der Präzession, so folgt:

$$\Omega_{Pr} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{L_z}\frac{dL}{dt} \tag{9}$$

$$M = \frac{dL}{dt} = m'ag \tag{10}$$

$$\Rightarrow \Omega_{Pr} = \frac{m'ag}{L_z} = \frac{m'ag}{I_z\omega_z} \tag{11}$$

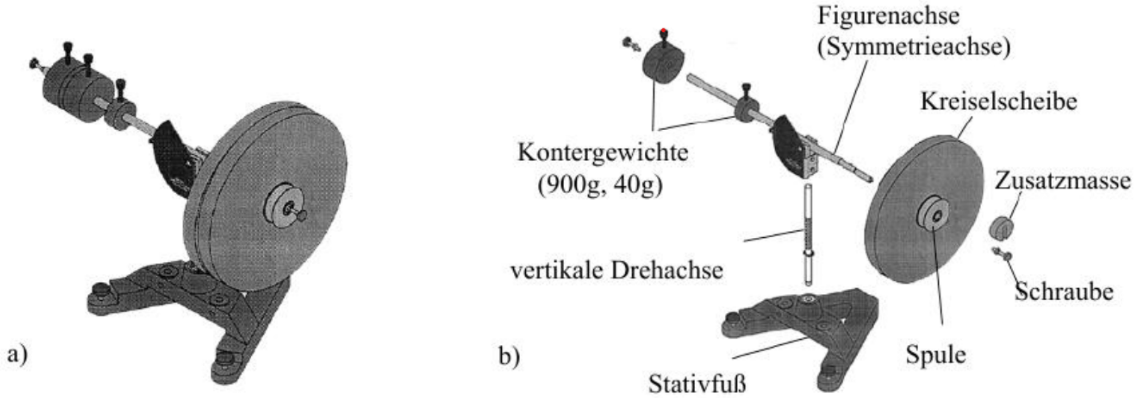


Abbildung 3: *Das im Versuch verwendete Gyroskop ist unter a) illustriert. Unter b) sind die einzelnen Bauteile des Versuchsaufbaus sowie deren im folgenden verwendeten Bezeichnungen angegeben.*

3 Versuchsaufbau und -beschreibung

Ein starrer Körper hat sechs Freiheitsgrade, drei der Translation und drei der Rotation. Unser Kreiselsystem wird in einem Punkt (dem Fixpunkt am oberen Ende der vertikalen Drehachse, siehe Abbildung 3) festgehalten, so dass nur drei Freiheitsgrade der Rotation vorhanden sind. Die Kreiselscheibe kann sich reibungsarm um eine horizontale, aber verkippbare Figurenachse drehen. An der Kreiselscheibe befindet sich eine Spule, über die ein Faden aufgewickelt werden kann. Nun können mit Hilfe einer Halterung verschiedene Gewichte an den Faden gehängt und so die Kreiselscheibe auf einen definierten Drehimpuls L beschleunigt werden. Werden die Kontergewichte so eingestellt, dass der Schwerpunkt des Systems (bestehend aus Kreiselscheibe, Kontergewichte, Figurenachse) mit dem Fixpunkt zusammenfällt, so kann die Gravitationskraft kein Drehmoment auf das System ausüben ($M \approx 0$), und der Kreisel bewegt sich kräftefrei. Bei dem kräftefreien Kreisel gilt die Drehimpulserhaltung ($\frac{dL}{dt} = M = 0$), d.h. der Drehimpulsvektor $\vec{L}$ steht fest im Raum (auch wenn sich die Kreiselachse bewegt). Eine solche Bewegung eines käftefreien Kreisels nennt man Nutation. Als nicht kräftefrei bezeichnet man einen Kreisel, wenn ein äußeres Drehmoment wirkt. Dies kann man erreichen, indem man das Gleichgewicht des kräftefreien Kreiselsystems durch eine Zusatzmasse (siehe Abbildung) stört. Die entstehende Kreiselbewegung nennt man Präzession.

4 Grundsätzliche Zusammenhänge zur Erläuterung der Formeln

Die nachfolgenden Zusammenhänge stellen lediglich einen Auszug aus der allgemeinen Zusammenfassung zu (Fehler-)Methoden dar. Sie dienen alleine einem besseren Verständnis der nachfolgenden Zusammenhänge und Aufgaben. Für eine vollständige Erläuterung, vor allem im Bezug auf den graphischen Geradenausgleich per Extremalgeraden wird auf die Allgemeine (Fehler-) Methoden Zusammenfassung verwiesen.

4.1 Mittelwert und dessen Standardabweichung

Angenommen es liegen n Werte x_i einer Größe x mit gleicher Ungenauigkeit vor, also $\Delta x_i = \Delta x$ für alle i mit $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Dann ergibt sich deren Mittelwert $\overline{x}$ wie folgt:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Als Fehler wird insbesondere im Zuge dieses Praktikums die Standardabweichung des Mittelwerts genutzt, nicht zu verwechseln mit der Standardabweichung einer Einzelmessung, deren Formel recht ähnlich ist, auf die hier aber nicht weiter eingegangen wird. Die relevante Formel der Standardabweichung des Mittelwerts, hier als $\Delta\overline{x}$ bezeichnet, lautet

$$\Delta\overline{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}.$$

Sollte es vorkommen, dass für alle i gilt $\overline{x} = x_i$, so würde der Wert $\Delta\overline{x}$ verschwinden. In diesem Fall ist eine sinnvolle Alternative die Gaußsche Fehlerfortpflanzung zu nutzen, was zu $\Delta\overline{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{n}}$ führt, da alle x_i die gleiche Ungenauigkeit Δx besitzen.

4.2 Gaußsche Fehlerfortpflanzung

Die Gaußsche Fehlerfortpflanzung beschreibt den Einfluss fehlerbehafteter Größen auf die Ungenauigkeit einer sich aus diesen zusammensetzenden Größe. Als ein verallgemeinertes Beispiel ist der Wert von z mit dessen Ungenauigkeit Δz zu bestimmen. Der Wert z hängt von mehreren anderen Größen ab,

$$z = z\left(a, b, c, \ldots\right).$$

Alle Größen $a, b, c, \ldots$ besitzen jeweils eine Ungenauigkeit $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \ldots$. Dann ergibt sich Δz aus

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial a}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial c}\Delta c\right)^2 + \ldots},$$

wobei die Brüche $\frac{\partial z}{\partial x}$ partiellen Ableitungen von z nach einer Größe x entsprechen.

5 Sicherheitshinweise

Bitte beachten Sie die allgemeinen Sicherheitshinweise, die in der Praktikumseinleitung dargelegt wurden.

Bitte Vorsicht! Die Rotationsscheibe kann bei Entfernung der Fixierstange gegen die vertikale Drehachse schlagen und das Gyroskop beschädigen.

Informieren Sie bei Defekten an Bestandteilen des Aufbaus Ihren Betreuer und versuchen Sie nicht selbst Teile zu demontieren.

6 Durchführung (im Praktikum)

6.1 Justierung des Kreisels und Herstellen des Gleichgewichts

Ziel dieses Teils ist es, die vertikale Drehachse (siehe Abb. 3) vertikal auszurichten und den Kreisel ins Gleichgewicht zu bringen.

1. Bringen Sie den Kreisel aus dem Gleichgewicht, indem Sie die Kontergewichte an die vertikale Drehachse schieben. Die Kreiselscheibe lehnt sich dann gegen die vertikale Drehachse.

2. Positionieren Sie den Kreisel wie in Abb. 6 a) und justieren Sie den gezeigten Schraubfüss, so dass die Figurenachse sich nicht wegbewegt.

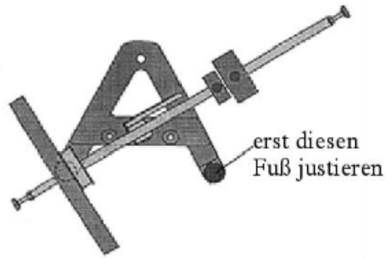


Abbildung 4: *Justage Schritte 1 und 2*

3. Positionieren Sie nun den Kreisel wie in Abb. 6 b) und justieren Sie den anderen Schraubfuß solange, bis der Kreisel in dieser Stellung stehen bleibt.

4. Bringen Sie den Kreisel durch Verschieben des 900-g-Gegengewichts und des 40-g Gegengewichts zum Feinabgleich wieder ins Gleichgewicht.

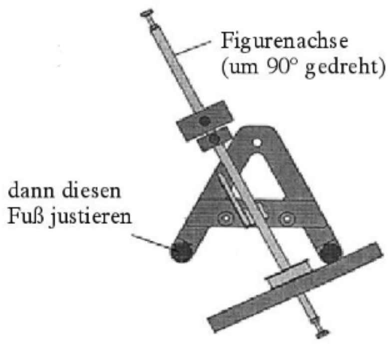


Abbildung 5: *Justage Schritte 3 und 4*

6.2 Beschleunigung der Kreiselscheibe und des Trägheitsmoment I_z

Bei diesem Versuchsteil wird das Trägheitsmoment der Kreiselscheibe um die Figurenachse I_z bestimmt. Das wird erreicht, indem man die Kreiselscheibe über die Spule mit verschiedenen Massen beschleunigt und die resultierenden Winkelgeschwindigkeiten der rotierenden Kreiselscheibe bestimmt.

Durchführung: Führen Sie diesen Versuch mit 5 verschiedenen Massen (inkl. 200 g, 150 g, 100 g und 50 g) je drei mal durch. Beachten Sie, dass die Masse nicht die Tischkante berührt. Notieren Sie auch bitte die Masse der Massenhalterung!

1. Fixieren Sie den justierten Kreisel mit Hilfe der Stativstange und Winkelhalterung am Stativfuss und platzieren Sie den Kreisel derart, dass die Spule über die Tischkante hinausragt (siehe Abbildung 7).

2. Beschleunigen Sie die Kreiselscheibe mit der Masse m: Hängen Sie dazu die Schnur mit der Halterung an den hierfür vorgesehenen Dorn und wickeln Sie den Faden sorgfältig auf der Spule auf. Legen Sie die Masse m auf die Halterung und lassen Sie diese nun die Kreiselscheibe beschleunigen. Peilen sie hierfür die Unterkante der Tischplatte als Startpunkt der Fallbewegung an und messen sie die Gesamtlänge L der Schnur exklusive der Massenhalterung. Die Fallhöhe und somit die Beschleunigungsstrecke h entspricht nun gerade der Länge der Schnur abzüglich des Abstands der unteren Tischunterkante zur Drehachse der Kreiselscheibe.

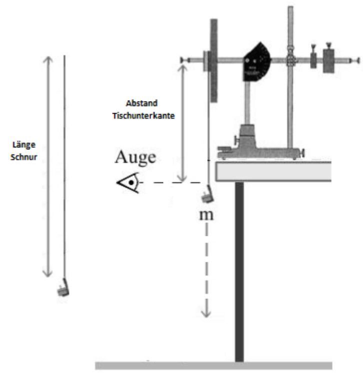


Abbildung 6: *Beschleunigung der Kreiselscheibe*

3. Messen Sie die erreichte Winkelgeschwindigkeit der Kreiselscheibe nach der Beschleunigungsphase, indem Sie die Zeit T_{Ges} für mehrere Umdrehungen $n_{Drehungen}$ der Kreiselscheibe messen ($\omega = \frac{2\pi}{T_{Per}}$ wobei $T_{Per} = \frac{T_{Ges}}{n_{Drehungen}}$).

Gewicht Massenhalterung:	
Länge Schnur: $\pm$	Abstand Tischunterkante: $\pm$

	1. Wiederholung		2. Wiederholung		3. Wiederholung	
Masse m	$n_{Drehungen}$	T_{Ges} [s]	$n_{Drehungen}$	T_{Ges} [s]	$n_{Drehungen}$	T_{Ges} [s]
50 g						
100 g						
150 g						
200 g						

6.3 Nutation

Bei diesem Versuchsteil soll die Nutation beobachtet und kennengelernt werden. Aus der Messung der Nutationsfrequenz kann das Trägheitsmoment senkrecht zur Figurenachse I_x bestimmt werden. Zu Beginn entfernen Sie die Stativstange und überprüfen das Gleichgewicht des Kreisels (ggf. müssen die Kontergewichte nachjustiert werden). Beschleunigen Sie die Kreiselscheibe (mit einer beliebigen Masse). Da jetzt keine Stativstange angebracht ist, sollte die Figurenachse von einem Teilnehmer möglichst in der Waagerechten gehalten werden. Lassen sie die Figurenachse nun los und geben Sie Ihr einen kurzen seitlichen Stoss.

Durchführung:

1. Beschleunigen Sie den Kreisel mit den in Teil 6.2 benutzten Massen m. Da jetzt keine Stativstange angebracht ist, sollte die Figurenachse von einem Teilnehmer möglichst in der Waagerechten gehalten werden und dieselbe Fallhöhe wie in Teil 6.2 realisiert wird.

2. Bringen Sie den Kreisel durch einen kurzen Stoß senkrecht zur Figurenachse zum Nutieren. Beachten Sie: durch den Stoß geben Sie dem schlafenden Kreisel mit L=L_z einen weiteren Drehimpuls L_x senkrecht zur Figurenachse. Bei der Herleitung von Gleichung 8 ist L_x von Anfang an vorhanden! Daher sollte der Schlag möglichst schwach ausfallen.

3. Zur Bestimmung der Nutationsfrequenz aus Gleichung 8 messen Sie jeweils fünfmal die Zeit über 10 Umläufe der Figurenachse:

	Gesamtzeiten 10 Nutationen				
Masse m	$T_{Ges,1}$ [s]	$T_{Ges,2}$ [s]	$T_{Ges,3}$ [s]	$T_{Ges,4}$ [s]	T_{Ges} [s]
50 g					
100 g					
150 g					
200 g					

4. In der Auswertung soll der hier gemessene Wert des Trägheitsmoments I_x mit dem berechneten Wert verglichen werden. Beachten Sie, dass I_x das Trägheitsmoment bezüglich Verkippung des gesamten Kreiselsystems ist. Die Kontergewichte tragen also zu I_x bei. Notieren Sie bitte daher deren Abstände zur Aufhängung, sowie die Radien der Kreiselscheibe und der Spule.

Abstand 40g Gewicht a_{40}:	$\pm$
Abstand 900g Gewicht a_{900}:	$\pm$
Radius Scheibe R_K:	$\pm$
Radius Scheibe R_{KA}:	$\pm$

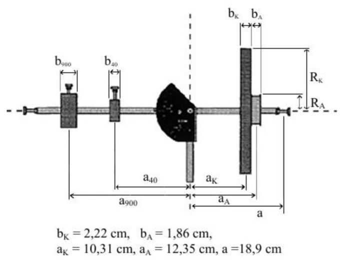


Abbildung 7: *Abmessungen des Versuchsaufbaus*

6.4 Präzession

Bei diesem Versuchsteil soll die Präzession beobachtet und kennengelernt werden. Aus der Messung der Präzessionsfrequenz kann laut Gleichung (4) das Trägheismoment entlang der Figurenachse Iz bestimmt werden.

Einübung der Messmethode:

- **Bitte Vorsicht!** Die Rotationsscheibe kann gegen die vertikale Drehachse schlagen und das Gyroskop beschädigen.
- Bringen Sie die Figurenachse in eine waagerechte Position und hängen Sie eine beliebige Zusatzmasse auf die Schraube vor die Rotationsscheibe. Dann macht der rotiernde Kreisel eine Präzessionsbewegung. Je nachdem, ob und in welche Richtung man dem Kreisel eine Anfangsgeschwindigkeit mitgibt, ist die Präzession auch von einer Nutation überlagert. Versuchen Sie eine möglichst nutationsfreie Präzessionsbewegung zu erzeugen, indem Sie dem Kreisel eine geringe Anfangsgeschwindigkeit in Präzessionsrichtung mitgeben.

Durchführung der Messungen:

1. Überprüfen Sie die Justierung des Kreisels, und bringen Sie ihn notfalls mit Hilfe der Gegengewichte nochmals ins Gleichgewicht.
2. Hängen Sie eine Zusatzmasse auf die dafür vorgesehene Schraube.
3. Beschleunigen Sie den Kreisel mit m = 200 g und lassen Sie ihn in der horizontalen Ebene präzessieren. Eine auftretende Nutation wird verhindert, indem man dem Kreisel eine geringe Anfangsgeschwindigkeit in Präzessionsrichtung mitgibt. Dies ist notwendig, da Gleichung 11 unter der Annahme einer nutationsfreien, horizontalen Präzession hergeleitet wurde.
4. Bestimmen Sie die Gesamtumlaufzeit T_{Ges} für n_{Um} Präzessionsdrehungen und somit die Präzessionsfrequenz Ω_{Pr} für fünf verschiedene Zusatzmassen m_0. Bei der Messung mit m_0 = 153 g sollten zwei Umläufe n_{Um} gemessen werden, um die Genauigkeit der Messung zu steigern.

	Umlaufzeiten							
m_0	n_{Um}	$T_{Ges,1}$ [s]	n_{Um}	$T_{Ges,2}$ [s]	n_{Um}	$T_{Ges,3}$ [s]	n_{Um}	$T_{Ges,4}$ [s]
153 g								

7 Auswertung und Diskussion (zu Hause)

7.1 Bestimmung des Trägheitsmoment I_z

Fällt die Masse m die Höhe h, so gilt die Energiebilanz

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_z\omega^2 \tag{12}$$

wobei die Endgeschwindigkeit v des fallenden Massenstücks und die erreichte Winkelgeschwindigkeit der Scheibe ω über den Abrollweg der Schnur zusammenhängen. Hierbei gilt

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{13}$$

$$mit \qquad \Delta s = U_A = 2\pi R_A \tag{14}$$

$$sowie \qquad \Delta t = T_{Kreisel} = \frac{2\pi}{\omega} \tag{15}$$

$$\Rightarrow v = \frac{2\pi R_A \omega}{2\pi} = \omega R_A \tag{16}$$

, wobei R_A der Radius der Aufhängungsspule ist auf dem die Schnur aufgerollt wird. Insofern lässt sich Gleichung 12 in folgender Weise umformen:

$$mgh = \frac{1}{2}mR_A^2\omega^2 + \frac{1}{2}I_z\omega^2 \tag{17}$$

$$\Rightarrow \frac{2h}{\omega^2} = \frac{I_Z}{mg} + \frac{R_A^2}{g} \tag{18}$$

Letztere Gleichung beschreibt eine Lineare Funktion der Form y=mx+b wobei y=$\frac{2h}{\omega^2}$, m=I_Z, x=$\frac{1}{mg}$ und b=$\frac{R_A^2}{g}$ gilt. Um das Trägheitsmoment I_z zu bestimmen muss man demnach die Steigung dieser Funktion bestimmen. Hierzu müssen zunächst für jede Beschleunigungsmasse m aus Aufgabenteil 6.2 die Periodendauern der einzelnen Messungen $T_{Periode,i}$ und weiterführend ihr Mittelwert samt Unsicherheit bestimmt werden. Bestimmen Sie die hierzu benötigten Formeln analog zur Erläuterung in Teil 4.1:

$$T_{Periode,i} = \frac{T_{Ges,i}}{n_{Drehungen,i}} \tag{19}$$

$$\bar{T}_{Periode} = \rule{8cm}{0.4pt} \tag{20}$$

$$\Delta\bar{T}_{Periode} = \rule{8cm}{0.4pt} \tag{21}$$

Anhand der Periodendauer $\bar{T}_{Periode}$ kann man nun die Kreisfrequenz ω der beschleunigten Kreiselscheibe bestimmen, wobei die Zugehörige Unsicherheit aus der Erläuterung zur Gaußschen Fehlerfortpflanzung in Teil 4.2 folgt:

$$\omega = \frac{2\pi}{\bar{T}_{Periode}} \qquad \Delta\omega = \frac{2\pi\Delta\bar{T}_{Periode}}{\bar{T}^2_{Periode}} \tag{22}$$

Wenden sie die obigen Gleichungen nun an um die nachfolgende Tabelle anhand ihrer Messwerte aus Versuchsteil 6.2 auszufüllen:

Gewicht Massenhalterung:	
Länge Schnur L_S: $\pm$	Abstand Tischkante δh_{Tisch}: $\pm$
Fallstrecke h=L_S-δh_{Tisch}:	
Fehler Fallstrecke Δh=$\sqrt{\Delta L_S^2 + \Delta\delta h_{Tisch}^2}$:	

Masse m	50g	100 g	150 g	200g	
$T_{Periode,1}$					
$T_{Periode,2}$					
$T_{Periode,3}$					
$\bar{T}_{Periode}$					
$\Delta\bar{T}_{Periode}$					
ω					
$\Delta\omega$					

Daraus folgernd können nun die Y- bzw. X-Werte bestimmt werden anhand:

$$Y = \frac{2h}{\omega^2} \qquad \Delta Y = \sqrt{(\frac{2\Delta h}{\omega^2})^2 + (\frac{2h\Delta\omega}{\omega^3})^2} \qquad X = \frac{1}{m_{ges}g}$$

Hierbei beschreibt m_{ges} die Summe aus dem Gewicht der Massenhalterung und des angehängten Beschleunigungsgewichtes. Bestimmen sie die genannten Werte anhand Ihrer vorherigen Tabelle und Tragen sie die Einheiten in die eckigen Klammern ein:

	Y [____]	ΔY [____]
X_{50g} [____]:		
X_{100g} [____]:		
X_{150g} [____]:		
X_{200g} [____]:		
X [____]:		

Tragen Sie die bestimmten Werte im nachfolgenden Graphen gegeneinander auf. Führen Sie eine graphische Geradenanpassung durch und bestimmen Sie aus deren Steigung das Trägheitsmoment I_z inkl. Fehler.

Abbildung 8: *$\frac{2h}{\omega^2}$ gegen $\frac{1}{m_{ges}g}$ zur Bestimmung des Trägheitsmomentes I_z*

Aus Abbildung 8 ergibt sich durch graphischen Geradenausgleich mittels Extremalgeraden (Bitte Einheiten nicht vergessen):

	Steigung m	**Achsenabschnitt b**
Maximal Gerade		
Minimal Gerade		
Mittelwert		
Unsicherheit		

Da die Steigung gerade dem Trägheitsmoment um die Figurenachse I_z entspricht folgt demnach:

$$\boxed{\Rightarrow I_z = \qquad\qquad \pm \qquad\qquad gm^2}$$

7.2 Nutation

7.2.1 Experimentelle Bestimmung des Trägheitsmoments I_X

Übernehmen Sie die Kreisfrequenzen ω aus dem vorigen Abschnitt und berechnen Sie den jeweiligen Drehimpuls $L = I_z\omega$ und seinen Fehler $\Delta L = \sqrt{(\Delta I_z \omega)^2 + (I_z \Delta\omega)^2}$. Tragen sie ebenfalls die korrekten Einheiten ein.

Masse m	50 g	100 g	150 g	200 g	
ω [____]					
$\Delta\omega$ [___]					
L [____]					
ΔL [___]					

Bestimmen Sie nun für die fünf experimentellen bestimmten Umlaufzeiten für 10 Nutationen ihre zugehörigen Periodendauern $T_{Nut,i}$ indem sie die gemessene Gesamtzeit durch die Anzahl an Umdrehungen n (n=10) dividieren. Berechnen sie anschließend den Mittelwert aus diesen fünf pro Masse bestimmten Periodendauern $\bar{T}_{Nut,i}$ samt ihrer Unsicherheiten $\Delta\bar{T}_{Nut,i}$. Für letztere Werte ergänzen sie Gleichung 21 um die zwei zusätzlichen Terme 4 bzw. 5 und dividieren Sie entsprechend der Definition der Standardabweichung anstatt durch $2 \cdot 3$ mit $4 \cdot 5$.

Masse m	50 g	100 g	150 g	200 g	
$T_{Nut,1}$ [s]					
$T_{Nut,2}$ [s]					
$T_{Nut,3}$ [s]					
$T_{Nut,4}$ [s]					
$T_{Nut,5}$ [s]					
$\bar{T}_{Nut}$ [s]					
$\Delta\bar{T}_{Nut}$ [s]					
Ω_{Nut} [$\frac{1}{s}$]					
$\Delta\Omega_{Nut}$ [$\frac{1}{s}$]					

Übertragen Sie die Werte der mittleren Periodendauerns sowie der Drehimpulse für die jeweiligen Massen in die nachfolgende Tabelle und bestimmen Sie anhand des Zusammenhangs $\Omega_{Nut}=\frac{2\pi}{T_{Nut}}$ die Nutationsfrequenz. Zuletzt ermitteln Sie das Trägheitsmoment $I_x = \frac{L}{\Omega_{Nut}}$ anhand von Gleichung 8 und seine Unsicherheit welche gegeben ist durch $\Delta I_x = \sqrt{(\frac{\Delta L}{\Omega_{Nut}})^2 + (\frac{L\Delta\Omega_{Nut}}{\Omega_{Nut}^2})^2}$.

Masse m	50 g	100 g	150 g	200 g	
$\bar{T}_{Nut}$ [s]					
$\Delta\bar{T}_{Nut}$ [s]					
Ω_{Nut} $[\frac{1}{s}]$					
$\Delta\Omega_{Nut}$ $[\frac{1}{s}]$					
L [_____]					
ΔL [____]					
I_X [____]					
ΔI_x [____]					

Zuletzt bestimmen sie aus den fünf einzelnen gemessenen Trägheitsmomenten einen Mittelwert samt Unsicherheit für das Trägheitsmomente I_X:

$$I_X = \qquad\qquad \pm \qquad\qquad gm^2$$

7.2.2 Berechnung des Trägheitsmoments I_X

I_x ist das Trägheitsmoment des gesamten Kreiselsystems (inkl. Achse und Kontergewichte) bezüglich Drehung (oder Verkippung) um die vertikale Drehachse. Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_x mit Hilfe der nebenstehenden Skizze und den von Ihnen gemessenen Werte für a_{40}, a_{900}, R_A und R_K. Übertragen sie hierzu zunächst Ihre Messwerte zu den angegebenen Maßen in die nachfolgende Tabelle.

Abstand 40g Gewicht a_{40}:	±
Abstand 900g Gewicht a_{900}:	±
Radius Scheibe R_K:	±
Radius Scheibe R_{KA}:	±

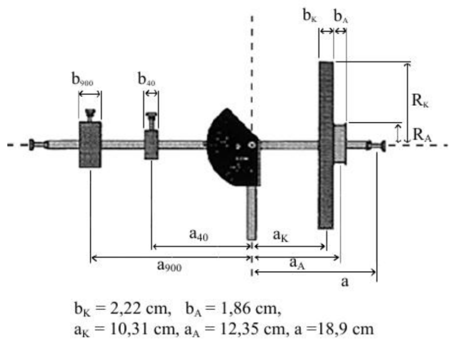


Abbildung 9: *Abmessungen des Versuchsaufbaus*

Sie erhalten das Gesamtträgheitsmoment I_x um die vertikale Drehachse als Summe der Einzelkomponenten (2 Kontergewichte, Figurenachse, Kreiselscheibe, Spule), wobei das Trägheitsmoment der Figurenachse $I_{Achse} = 3.77$ gm^2 beträgt. Jede der genannten einzelnen Komponenten ist für sich genommen ein Vollzylinder. Das Trägheitsmoment eines Vollzylinders welcher um seine Symmetrieachse rotiert lässt sich wie folgt berechnen:

$$I_{Zyl,sym} =$$

Die Rotation des Kreisel um seine vertikale Drehachse bedeutet jedoch dass die Vollzylinder nicht um Ihre Symmetrieachse rotieren sondern um eine Querachse. Das Trägheitsmoment eines Vollzylinders um jene Querachse berechnet sich nun durch:

$$I_{Zyl,quer} = m(\frac{R^2}{4} + \frac{B^2}{12})$$

, wobei R den Radius des Vollzylinders und B seine Breite beschreibt. Nun rotieren die einzelnen Komponenten im Versuchsaufbau nicht direkt um jene Querachse sondern sind bezüglich der eigentlichen vertikalen Drehachse um den Abstand a parrallel verschoben. In diesem Fall greift der Satz von Steiner nach welchem gilt:

$$I_{Komponente} = I_{Zyl,quer} + \underline{\hspace{3cm}} = m(\underline{\hspace{1.2cm}} + \frac{R^2}{4} + \frac{B^2}{12})$$

Die Kreiselscheibe inkl. Aluminiumspule hat eine Gesamtmasse von 1735 g; mit der Dichte von Aluminium können Sie die Massen der Spule und somit der Kunststoffscheibe berechnen. Die Dichte von Aluminium beträgt:

$\rho_{Alu} =$ $\quad\quad\quad\quad$ $Quelle:$ ________________________________

Das Volumen eines Vollzylinders bestimmt sich wie folgt:

$$V_{Zyl} = \underline{\hspace{5cm}} \Rightarrow V_{Spule} = \underline{\hspace{5cm}}$$

Die Masse der Aluminiumspule berechnet sich nun aus dem Produkt aus Volumen und Dichte. Zur Ermittlung des Gesamtträgheitsmomentes I_x um die vertikale Drehachse bestimmen sie nun die Trägheitsmomente bezüglich jener Drehachse für die einzelnen Komponenten und bilden sie die Summe.

	a	R	B	m	I_X
40g	±	±	±	40g	±
900g	±	±	±	900g	±
Spule	0.1235 m	±	0.0186 m	±	±
Scheibe	0.1031 m	±	0.0222 m	±	±
Achse	-	-	-	-	3.77 gm^2
				Summe:	

7.3 Präzession

7.3.1 Experimentelle Bestimmung des Trägheitsmomentes I_z

Übernehmen Sie ω für die Beschleunigungsmasse m=200 g aus Teil 7.1. Übertragen sie Ihre Messwerte aus Teil 6.4 in die untenstehende Tabelle und bestimmen sie anschließend die mittleren Periodendauern der Präzession für die verschiedenen angehängten Massen:

$\bar{T}_{Pr} =$ ______________ $\Delta\bar{T}_{Pr} =$ ______________

	Umlaufzeiten							
m_0	n_{Um}	$T_{Ges,1}$ [s]	n_{Um}	$T_{Ges,2}$ [s]	n_{Um}	$T_{Ges,3}$ [s]	n_{Um}	$T_{Ges,4}$ [s]
153 g								

	Massen				
	153g				
$\bar{T}_{Pr}$ [s]					
$\Delta\bar{T}_{Pr}$ [s]					
Ω_{Pr} $[\frac{1}{s}]$					
$\Delta\Omega_{Pr}$ $[\frac{1}{s}]$					

Tragen Sie nun $\frac{m_0 g a}{\omega}$, wobei a (a=0.189m) der Abstand der Gewichtshalterung zur Drehachse ist, als Funktion von Ω_{pr} auf und bestimmen Sie aus der Steigung das Trägheitsmoment I_z.

	153g				
$\frac{m_0 g a}{\omega}$					
$\Delta\frac{m_0 g a}{\omega}$					
Ω_{Pr} $[\frac{1}{s}]$					
$\Delta\Omega_{Pr}$ $[\frac{1}{s}]$					

Abbildung 10: *$\frac{m_0 g a}{\omega}$ gegen Ω_{Pr} zur Bestimmung des Trägheitsmomentes I_z*

Aus Abbildung 10 ergibt sich durch graphischen Geradenausgleich mittels Extremalgeraden:

	Steigung m	**Achsenabschnitt b**
Maximal Gerade		
Minimal Gerade		
Mittelwert		
Unsicherheit		

Das Trägheitsmoment I_z entspricht in Folge von Gleichung 11 hierbei gerade dem Kehrwert der Steigung. Insofern ergibt sich:

$$I_z = \frac{1}{m} \qquad mit \quad \Delta I_z = \frac{\Delta m}{m}$$

$$\boxed{\Rightarrow I_z = \qquad\qquad \pm \qquad\qquad gm^2}$$

7.3.2 Berechnung des Trägheitsmomentes I_z

Berechnen Sie mit den Daten aus 7.2.2 das Trägheitsmoment I_z. I_z ist das Trägheitsmoment des Kreiselscheibe (inkl. Spule) bezüglich Drehung um die Figurenachse und entspricht demnach einer Rotation um die Symmetrieachse. Wie in Abschnitt 7.2.2 hergeleitet gilt für dieses:

$$I_{Zyl,sym} = \frac{1}{2}mR^2 \qquad \Delta I_{Zyl,sym} = \frac{1}{2}\sqrt{(\Delta mR^2)^2 + (2mR\Delta R)^2} \tag{23}$$

	R	m	I_z
Spule	±	±	±
Scheibe	±	±	±
		Summe:	

8 Diskussion

8.0.1 Trägheitsmoment I_x

Vergleichen sie den experimentellen bestimmten Wert in gm^2 für I_X mit jenen welchen sie rechnerisch bestimmt haben und diskutieren sie Ihre Ergebnisse.

	Versuchsteil 7.2.1	Versuchsteil 7.2.2
I_X	$\pm$	$\pm$

Diskussion:

8.0.2 Trägheitsmoment I_z

Vergleichen sie die experimentell bestimmten Werte für I_z in gm^2 mit jenen welchen sie rechnerisch bestimmt haben und diskutieren sie Ihre Ergebnisse

	Versuchsteil 7.1	Versuchsteil 7.3.1	Versuchsteil 7.3.2
I_z	$\pm$	$\pm$	$\pm$

Diskussion:

9 Literatur

- Fehlerrechnung:
  http://www.astro.uni-koeln.de/teaching_seminars/AP/
  http://www.ph2.uni-koeln.de/fileadmin/Lehre/Anfaengerpraktikum/Fehler.pdf
- Budo, A.: Theoretische Mechanik
- Demtröder: Experimentalphysik 1, Springer, 2001
  http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html
- Meschede und Gerthsen: Physik, Springer, Berlin, 21. Aufl., 2002
  http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html
- Walcher, Elbel und Fischer: Praktikum der Physik, Vieweg+Teubner
- Westphal: Physikalisches Praktikum, Vieweg+Teubner