

Versuch M11 für Physiker

Kreisel

I. Physikalisches Institut, Raum 105
Stand: 17. Juli 2012



generelle Bemerkungen

- bitte Versuchsaufbau (rechts, mitte, links) angeben
- bitte Versuchspartner angeben
- bitte Versuchsbetreuer angeben
- bitte nur handschriftliche Auswertung

1 Einleitung

Unter einem *Kreisel* versteht man im Allgemeinen einen rotierenden Körper. Die Kreiselbewegung kommt in vielen Bereichen der Natur vor. In der Mechanik ist sie wichtig für den Diskuswurf, Kreiselkompass (mittlerweile weitestgehend durch GPS ersetzt), moderne Ballistik und Erdrotation. So führt z.B. die Erde unter dem Krafteinfluss der Sonne und des Mondes eine Kreiselbewegung aus, Präzession genannt, bei der die Erdachse in 26000 Jahren einen Kegelmantel beschreibt (das sog. Platonische Jahr). In der mikroskopischen Welt können aber auch Moleküle rotieren und Atome haben einen Eigendrehimpuls (Spin genannt). Das anschauliche Verständnis eines mechanischen Kreiselsystems hilft daher später in der quantenmechanischen Welt z.B. die Molekülspektren oder die Kernspin-Resonanz besser zu verstehen.

Bei dem Versuch M11 sollen die grundlegenden Bewegungen eines symmetrischen Kreisels, *Nutation* und *Präzession*, untersucht werden. Die Mathematik dazu ist nicht allzu komplex, aber für den Anfänger ist es manchmal schwierig, die Definitionen und Raumrichtungen des Drehimpulses, der verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten, der Kreiselachse etc. zu unterscheiden. Deshalb ist es bei diesem Versuch wichtig, das experimentelle Phänomen wie ein neugieriges Kind zu beobachten und zu verinnerlichen.

2 Vorbereitung (zu Hause)

was Sie zur Vorbereitung lernen sollten (Literaturhinweise in Teil 8):

- Grundlagen: Drehimpuls \vec{L} , Drehimpulserhaltung $d\vec{L}/dt = 0$, Trägheitsmoment, Steinerscher Satz, Hauptträgheitsachsen, Drehmoment \vec{M} , kräftefreier Kreisel, schwerer Kreisel, Nutation, Präzession.
- Die im Folgenden beschriebenen Zusammenhänge.
- Anwendungen (für Interessierte): Kreiselkompass, Präzession der Erde, Kernspin-Resonanz.
- Was hat das griechische Gericht Gyros mit unserem Kreisel (Gyroskop) zu tun?

3 Versuchsaufbau und -beschreibung

Ein *starrer Körper* hat sechs Freiheitsgrade, drei der Translation und drei der Rotation. Unser Kreiselsystem wird in einem Punkt (dem Fixpunkt am oberen Ende der vertikalen Drehachse, siehe Abb. 1) festgehalten, so dass nur drei Freiheitsgrade der Rotation vorhanden sind. Die Kreiselscheibe kann sich reibungsarm um eine horizontale, aber verkippbare Figurenachse drehen. An der Kreiselscheibe befindet sich eine Spule, über die ein Faden aufgewickelt werden kann. Nun können mit Hilfe einer Halterung verschiedene Gewichte an den Faden gehängt und so die Kreiselscheibe auf einen definierten Drehimpuls \vec{L} beschleunigt werden.

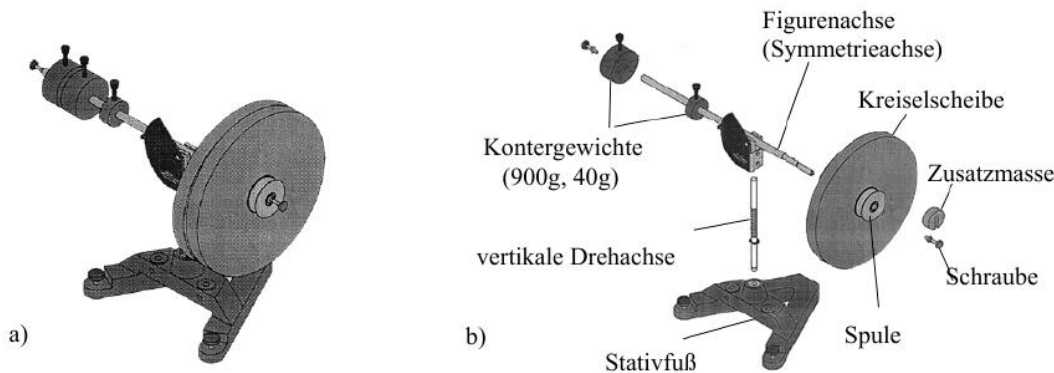


Abbildung 1: Das Gyroskop a) mit zwei Kreiselscheiben b) die Bauteile

Werden die Kontergewichte so eingestellt, dass der Schwerpunkt des Systems (bestehend aus Kreiselscheibe, Kontergewichte, Figurenachse) mit dem Fixpunkt zusammenfällt, so übt die Gravitationskraft kein Drehmoment auf das System aus ($\vec{M} = 0$), und der Kreisel bewegt sich kräftefrei. Bei dem kräftefreien Kreisel gilt die Drehimpulserhaltung ($d\vec{L}/dt = \vec{M} = 0$), d.h. der Drehimpulsvektor \vec{L} steht fest im Raum (auch wenn sich die Kreiselachse bewegt). Eine solche Bewegung eines kräftefreien Kreisels nennt man *Nutation*.

Als nicht kräftefrei bezeichnet man einen Kreisel, wenn ein äußeres Drehmoment ($\vec{M} \neq 0$) wirkt. Dies kann man erreichen, indem man das Gleichgewicht des kräftefreien Kreiselsystems durch eine Zusatzmasse (siehe Abbildung) stört. Die entstehende Kreiselmovement nennt man *Präzession* (welche im Allgemeinen von einer Nutationsbewegung überlagert ist).

4 Grundlagen

4.1 Winkelgeschwindigkeit, Trägheitsmoment, Drehimpuls

Genau wie von Position \vec{x} und Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ bei Translationsbewegungen, sprechen wir bei Rotationsbewegungen von Winkelposition $\vec{\phi}$ und Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$. \vec{x} und \vec{v} sind *polare Vektoren*, $\vec{\phi}$ und $\vec{\omega} = \frac{1}{r^2} \vec{r} \times \vec{v}$ hingegen sind *axiale Vektoren*¹. $\vec{\omega}$ steht senkrecht auf der von der Drehbewegung (\vec{r} und \vec{v}) beschriebenen Ebene, also par-

¹Polare Vektoren sind durch Richtung und Betrag spezifiziert. Axiale Vektoren sind hingegen durch Richtung und Betrag einer Drehung definiert was bei Punktspiegelungen dieser Größen dazu führt, dass sie ihr Vorzeichen beibehalten. Sie können aus polaren Vektoren durch das sogenannte *Kreuzprodukt* oder *Vektorprodukt* \times konstruiert werden. Beispiele sind

- die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \frac{1}{r^2} \vec{r} \times \vec{v}$ – üblicher Weise dargestellt über $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (siehe Abb. 2);
- der Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, mit dem sogenannten *Hebelarm* \vec{r} und dem *Impuls* $\vec{p} = m\vec{v}$; beachte die Abhängigkeit des Drehimpulses von der Position relativ zum Ort der bewegten Masse – die hier als punktförmig angenommen wird (vgl. Idealisierung einer *Punktmasse*);
- das Magnetfeld einer bewegten Ladung.

allel zur momentanen Drehachse. Der Betrag von $\vec{\omega}$ ist die Winkeländerung pro Zeit. Die Orientierung von $\vec{\omega}$ (der *rechte Drehsinn*, vgl. Abb. 2) ist allerdings Konvention.

Von Translationsbewegungen sind wir gewohnt, dass Impuls- und Geschwindigkeitsvek-

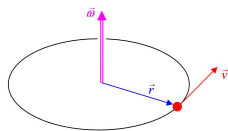


Abbildung 2: Konvention des Drehsinns

tor stets gleichgerichtet sind, da die Trägheit eines Körpers in alle Richtungen gleich ist (s. Abb 3). Es gilt $\vec{p} = m\vec{v}$, wobei die Masse m ein Skalar² ist. Formal analog schreibt man

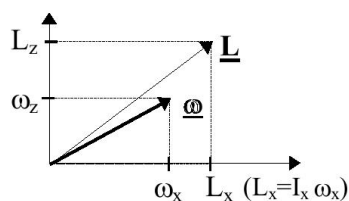
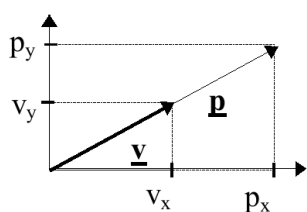


Abbildung 3: (links) Bei der Translation sind \vec{v} und \vec{p} immer kollinear. (rechts) Bei der Rotation gilt dies nicht unbedingt für $\vec{\omega}$ und \vec{L}

den Drehimpuls als $\vec{L} = \mathcal{I}\vec{\omega}$ mit dem sogenannten *Trägheitstensor*³ \mathcal{I} . Bei jedem starren Körper findet man drei aufeinander senkrechte Achsen, das sogenannte *Hauptträgheitsachsensystem*, in dem der Trägheitstensor \mathcal{I} die einfache Darstellung

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit den Hauptträgheitsmomenten I_x , I_y , und I_z hat. Im Allgemeinen sind die Hauptträgheitsmomente eines Körpers nicht gleich: $I_x \neq I_y \neq I_z$. Das in diesem Versuch benutzte Kreissystem ist allerdings rotationssymmetrisch. Die Symmetrieachse (Figurenachse) ist daher eine Hauptträgheitsachse, die wir als z -Achse des körperfesten Koordinatensystems definieren. Die dazu senkrechten Achsen seien die x - und die y -Achse. Es gilt für unseren Fall also $I_x = I_y \neq I_z$ auf Grund der Symmetrie. Eine kurze Anleitung zur Berechnung der Trägheitsmomente findet man in Teil 7.1. Für den Drehimpuls $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ und die

Beachten Sie die Eigenschaften des Vektorproduktes. Das Vektorprodukt zweier Vektoren ist ein Vektor. Dieser steht senkrecht auf der Ebene, welche die beiden erzeugenden Vektoren aufspannen (*Rechte-Hand-Regel*) und seine Länge entspricht der Fläche, die von diesen aufgespannt wird. Der Produktvektor ist axial, falls die Erzeugenden beide polar oder axial sind und sonst polar.

²Ein Skalar ist eine zahlwertige Größe. Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar führt anschaulich zu einer Änderung seines Betrages, lässt seine Richtung jedoch ungeändert (Dehnung oder Stauchung).

³Als *Tensoren* (2. Stufe) bezeichnet man *Matrizen*, deren *Spalten- oder Zeilenvektoren* sich wie polare Vektoren (\equiv Tensoren 1. Stufe) transformieren. Der Trägheitstensor ist ein *symmetrischer Tensor* und damit durch eine *Hauptachsentransformation*, d.h. durch Übergang in das durch die *Eigenvektoren* aufgespannten Koordinatensystem, *diagonalisierbar* (siehe Darstellung (1)). Die körperfesten Achsen in Richtung der Eigenvektoren von \mathcal{I} nennt man die *Hauptträgheitsachsen* des Körpers. Für eine homogene Massenverteilung, d.h. konstante *Massendichte* ρ , stimmen diese mit den *Symmetrieachsen* des Körpers überein.

Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ gilt mit $\vec{L} = \mathcal{I}\vec{\omega}$ im Hauptträgheitsachsensystem nach Beziehung (1)

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) = (I_x\omega_x, I_y\omega_y, I_z\omega_z). \quad (2)$$

Im allgemeinen Fall haben \vec{L} , $\vec{\omega}$ und die Figurenachse (z -Achse) auf Grund der unterschiedlichen Trägheitsmomente $I_x \neq I_y \neq I_z$ verschiedene Richtungen (Abb. 3).

Lösung der Bewegungsgleichungen (vgl. 7.2) für momentenfreie Kreisel $\vec{M} = \dot{\vec{L}} = 0$ führt zu stabilen Rotationen um die Achsen größten und kleinsten Trägheitsmomentes. Ansonsten kann das zeitliche Verhalten der momentanen Drehachse chaotisches Verhalten aufweisen. Die Drehimpulserhaltung ist natürlich immer gültig, so dass alle Kreiselbewegungen um die raumfeste Drehimpulsachse statt finden müssen. Für symmetrische Kreisel erhält man deutlich einfachere Lösungen. Im kräftefreien Fall erhält man als Lösung eine einfache Drehung der Figurenachse und $\vec{\omega}$ um die Drehimpulsachse. Für schwere Kreisel erhält man eine – einer möglichen Nutationsbewegung überlagerte – Präzession durch die zeitliche Änderung des Drehimpulses. Im Folgenden betrachten wir die Bewegungen symmetrischer Kreisel.

4.2 Nutation

Ist der Kreisel durch die Justierung der Kontergewichte im Gleichgewicht, so wirkt auf ihn kein resultierendes Gesamtdrehmoment, d.h. $\vec{M} = 0$. Bringt man den Kreisel zum Rotieren, ist in diesem Falle der Drehimpuls \vec{L} erhalten und steht daher fest im Raum. Im einfachsten Fall zeigen der raumfeste Drehimpulsvektor \vec{L} , der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ und die Kreiselachse in eine Richtung und der rotierende Kreisel scheint zu ruhen (*schlafender Kreisel*). Gibt man dem Kreisel jedoch einen kleinen seitlichen Stoß, so sind der Drehimpulsvektor und die Figurenachse (Hauptträgheitsachse) nicht mehr parallel.⁴ Gleichung (2) mit $I_x = I_y \neq I_z$ führt dann dazu, dass die Figurenachse und $\vec{\omega}$ nun um den raumfesten Drehimpulsvektor \vec{L} nutieren, so wie in Abb. 4 dargestellt. Die Winkelge-

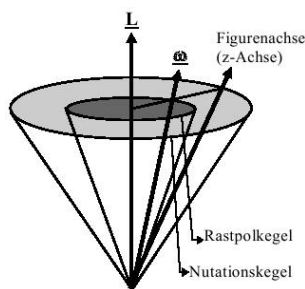


Abbildung 4: Nutationskegel eines kräftefreien Kreisels

⁴Der Stoß entspricht einer kurzzeitigen (Zeitintervall Δt) Krafteinwirkung \vec{F} mit dem Hebelarm \vec{r} entsprechend dem Abstand vom Auflagepunkt des Kreisels. Dies führt also zu einer Drehimpulsänderung $\Delta\vec{L} = \vec{M} \Delta t$. Da auf Grund der Geometrie $\Delta\vec{L} \perp \vec{L}$ ist, ändert der Drehimpuls \vec{L} durch den Stoß nur seine Richtung, sodass diese nach dem Stoß nicht mehr parallel zur Hauptträgheitsachse ist.

schwindigkeit dieser Nutationsbewegung ist gegeben durch

$$\Omega_{nut} = \frac{L}{I_x} \quad (3)$$

wobei $L = |\vec{L}|$ der Betrag des Drehimpulses des Kreisels ist und $I_x (= I_y)$ das Trägheitsmoment des symmetrischen Kreisels bezüglich Verdrehung der vertikalen Achse (oder Verkippung). Bitte halten Sie im Hinterkopf, dass zu dem Trägheitsmoment I_x nicht nur die Kreiselscheibe beiträgt, sondern auch die Kontergewichte sowie die Achse. Eine Herleitung von Gleichung (3) findet man im Anhang.

4.3 Präzession

Hängt man eine Zusatzmasse m_{pr} auf die Figurenachse (siehe Abbildungen 1 und 5 links), so wirkt ein Drehmoment $\vec{M} = \vec{a} \times m_{pr} \vec{g}$ auf den Kiesel, mit dem Hebelarm \vec{a} . Durch das Drehmoment ist der Drehimpulsvektor \vec{L} nicht mehr fest im Raum, sondern führt selbst

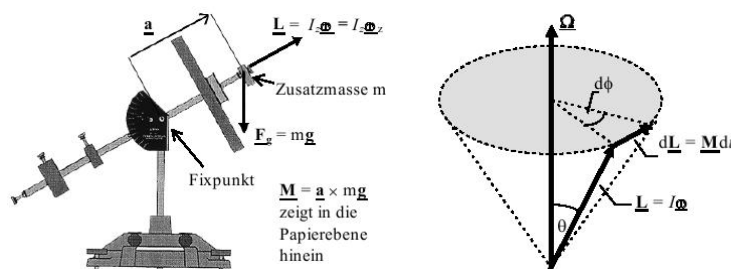


Abbildung 5: (links) Kraft und Drehmoment am Kiesel. (rechts) Präzessionsbewegung des rasch rotierenden symmetrischen Kreisels.

eine kegelartige Bewegung aus, *Präzession* genannt, wie in Abb. 5 rechts gezeigt ist. Die Winkelgeschwindigkeit der nutationsfreien Präzessionsbewegung in der Horizontalen, d.h. $\theta = \frac{\pi}{2}$, ist gegeben durch

$$\Omega_{pr} = \frac{m_{pr} g a}{I_z \omega_z} \quad (4)$$

wobei I_z und ω_z das Trägheitsmoment und die Winkelgeschwindigkeit bezüglich der Figurenachse sind. Eine Herleitung findet sich in Teil 7.4.

5 Durchführung (im Praktikum)

5.1 Justierung des Kreisels und Herstellen des Gleichgewichts

Ziel dieses Teils ist es, die vertikale Drehachse (siehe Abb. 1) vertikal auszurichten und den Kiesel ins Gleichgewicht zu bringen.

1. Bringen Sie den Kiesel aus dem Gleichgewicht, indem Sie die Kontergewichte an die vertikale Drehachse schieben. Die Kreiselscheibe lehnt sich dann gegen die vertikale Drehachse.

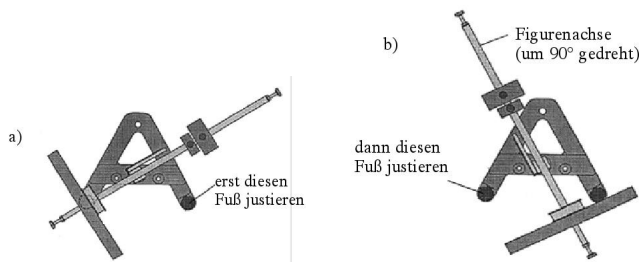


Abbildung 6: Justierung

2. Positionieren Sie den Kreisel wie in Abb. 6 a) und justieren Sie den gezeigten Schraubfuß, so dass die Figurenachse sich nicht wegbewegt.
3. Positionieren Sie nun den Kreisel wie in Abb. 6 b) und justieren Sie den anderen Schraubfuß solange, bis der Kreisel in dieser Stellung stehen bleibt.

5.2 Beschleunigung der Kreiselscheibe und deren Trägheitsmoment I_z

In diesem Versuchsteil wird das Trägheitsmoment der Kreiselscheibe um die Figurenachse I_z bestimmt. Hierzu wird die Kreiselscheibe über die Spule mit verschiedenen Massen beschleunigt und die resultierenden Winkelgeschwindigkeiten notiert. Zur Bestimmung von I_z folgende Überlegungen.

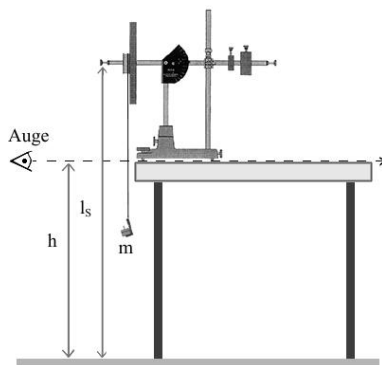


Abbildung 7: Beschleunigung der Kreiselscheibe

Fällt die Masse m die Höhe h , so gilt die Energiebilanz

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_z\omega^2, \quad (5)$$

wobei die Endgeschwindigkeit v des Massenstücks und die erreichte Winkelgeschwindigkeit der Scheibe ω über $v = R_A\omega$ zusammenhängen ($R_A =$ Radius der Aluminiumspule, vgl. Abb 9). Daraus folgt

$$\frac{2h}{\omega^2} = \frac{I_z}{mg} + \frac{R_A^2}{g}. \quad (6)$$

Durchführung:

1. Fixieren Sie den justierten Kreisel mit Hilfe der Stativstange und Winkelhalterung am Stativfuß und plazieren Sie den Kreisel derart, dass die Spule über die Tischkante hinausragt (siehe Abb. 7).
2. Beschleunigen Sie die Kreiselscheibe mit der Masse m : Hängen Sie dazu die Schnur mit der Halterung an den hierfür vorgesehenen Dorn und wickeln Sie den Faden sorgfältig auf der Spule auf. Legen Sie die Masse m auf die Halterung, und lassen Sie diese die Kreiselscheibe über eine bestimmte Höhe h beschleunigen.
3. Bestimmen Sie die Fallhöhe h (Tischhöhe) und messen Sie die erreichte Endwinkelgeschwindigkeit ω der Kreiselscheibe nach der Beschleunigungsphase, indem Sie die Zeit über mehrere Umdrehungen der Kreiselscheibe messen ($\omega = 2\pi/T$). Den Anfang der Strecke h können sie über die Tischfläche anpeilen. Da die Massenhalterung etwas schräg hängt, überlege man sich einen vernünftigen Wert für den Messfehler Δh von h .
4. Führen Sie diesen Versuch mit mindestens fünf verschiedenen Massen (inkl. 200 g, 150 g, 100 g und 50 g) jeweils mindestens drei Mal durch. Die Schnur sollte etwa so lang sein, dass beim Aufschlag der Masse auf den Boden die Schnur vom Dorn der Spule fällt. Achten Sie darauf, dass die Masse nicht die Tischkante berührt. Notieren Sie auch die Masse der Massenhalterung.

5.3 Nutation

In diesem Versuchsteil soll die Nutationsbewegung des Kreisels studiert werden. Aus der Messung der Nutationsperiodendauer $T_{\text{nut}} = \frac{2\pi}{\Omega_{\text{nut}}}$ kann laut Gleichung (3) das Trägheitsmoment senkrecht zur Figurenachse I_x bestimmt werden.

Kennenlernen der Nutationsbewegung:

Entfernen Sie die Stativstange und bringen Sie den Kreisel durch Verschieben des 900-g-Gegengewichts und des 40-g-Gegengewichts zum Feinabgleich ins Gleichgewicht. Beschleunigen Sie die Kreiselscheibe (mit einer Masse oder durch ziehen des Seils) und geben Sie der Figurenachse einen **leichten** seitlichen Stoß. Beobachten Sie die Nutationsbewegung.

Durchführung der quantitativen Messungen:

1. Beschleunigen Sie den Kreisel mit den fünf in Teil 5.2 benutzten Massen m . Da jetzt keine Stativstange angebracht ist, sollte die Figurenachse von einem Teilnehmer möglichst in der Waagerechten gehalten werden, so dass dieselbe Fallhöhe wie in Teil 5.2 realisiert wird. Der Drehimpuls liegt jetzt in der Figurenachse.
2. Bringen Sie den Kreisel durch einen **leichten** Schlag senkrecht zur Figurenachse zum Nutieren.

3. Messen Sie jeweils die Zeit über mehrere Umläufe der Figurenachse, d.h. die Periodendauer der Nutationsbewegung T_{nut} .
4. In der Auswertung soll der, durch obige Messungen über Gleichung 3 erhaltene Wert des Trägheitsmoments I_x mit dem, aus der geometrischen Masseverteilung bestimmten Wert verglichen werden. Beachten Sie, dass I_x das Trägheitsmoment bezüglich Verkippung des gesamten Kreisel systems ist (also nicht nur das der Kreiselscheibe). Die Kontergewichte tragen also zu I_x bei. Notieren Sie bitte daher deren Maße und Abstände zur Aufhängung, sowie die Radien der Kunststoffscheibe und der Aluminiumspule aus denen sich die Kreiselscheibe zusammensetzt.

5.4 Präzession

Bei diesem Versuchsteil soll die Präzession studiert werden. Aus der Messung der Periodendauer der Präzessionsbewegung T_{pr} kann gemäß Gleichung (4) das Trägheitsmoment entlang der Figurenachse I_z bestimmt werden.

Kennenlernen der Präzessionsbewegung:

- **Bitte Vorsicht!** Die Rotationsscheibe kann gegen die vertikale Drehachse schlagen und das Gyroskop beschädigen.
- Überprüfen Sie wiederum das Gleichgewicht des Kreisels und bringen sie es danach durch Ziehen des Seils in Rotation. Untersuchen Sie die Reaktion des Kreisels auf manuelle Bewegung der Figurenachse.
- Bringen Sie die Figurenachse in eine waagerechte Position und hängen Sie eine Zusatzmasse m_{pr} auf die Schraube vor der Rotationsscheibe. Dann führt der rotierende Kreisel eine Präzessionsbewegung aus. Je nachdem, ob und in welche Richtung man dem Kreisel eine Anfangsgeschwindigkeit mitgibt, ist die Präzession auch von einer Nutation überlagert, wie Abb. 8 verdeutlicht. Erzeugen Sie eine möglichst nutations-

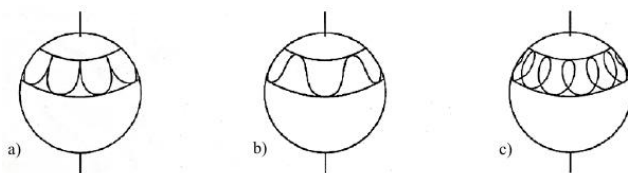


Abbildung 8: Bewegungen eines präzessierenden Kreisels (Schnittkurve der Figurenachse mit der Einheitskugel um den Fixpunkt) mit überlagerter Nutationsbewegung.

freie Präzessionsbewegung, indem Sie dem Kreisel eine geeignete Anfangsgeschwindigkeit in Präzessionsrichtung mitgeben.

- Bringen Sie den Kreisel zur nutationsfreien Präzession. Versuchen Sie, die Bewegung der Figurenachse um die vertikale Drehachse leicht zu bremsen oder zu beschleunigen. Was beobachten Sie und wie erklären Sie sich das?

Durchführung der quantitativen Messungen:

1. Überprüfen Sie die Justierung des Kreisels, und bringen Sie ihn mit Hilfe der Gegengewichte sorgfältig ins Gleichgewicht.
2. Hängen Sie eine Zusatzmasse m_{pr} auf die dafür vorgesehene Schraube. Der Abstand vom Massenmittelpunkt zum Unterstützungspunkt beträgt $a = 18,9 \text{ cm}$ (Abb. 9).
3. Beschleunigen Sie den Kreisel mit $m = 200 \text{ g}$ (aus Teil 5.2) und lassen Sie ihn in der horizontalen Ebene präzessieren. Eine auftretende Nutation wird verhindert, indem man dem Kreisel die entsprechende Anfangspräzessionswinkelgeschwindigkeit mit gibt. Dies ist notwendig, da Gleichung (4) unter der Annahme einer nutationsfreien, horizontalen Präzession hergeleitet wurde (s. Teil 7.4).
4. Bestimmen Sie die Präzessionsperiodendauer $T_{\text{pr}} = \frac{2\pi}{\Omega_{\text{pr}}}$ für fünf verschiedene Zusatzmassen m_{pr} . Bei der Messung mit $m_{\text{pr}} = 153 \text{ g}$ sollten zwei Umläufe gemessen werden, um die Genauigkeit der Messung zu steigern.

6 Auswertung und Diskussion (im Praktikum / zu Hause)

6.1 Beschleunigung der Kreiselscheibe und Trägheitsmoment I_z

Tragen Sie gemäß Gleichung (6) $\frac{2h}{\omega^2}$ gegen $\frac{1}{mg}$ auf. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment I_z inkl. Fehler per graphischer Geradenanpassung. Konstruieren Sie dazu die zwei Extremalgeraden und bestimmen Sie daraus die Ausgleichsgerade. I_z entspricht deren Steigung. Ist der $\frac{2h}{\omega^2}$ -Achsenabschnitt in Übereinstimmung zum gemessenen Durchmesser der Aluminiumspule $2R_A$? Berücksichtigen Sie die Masse der Massenhalterung. Die Masse der Schnur sowie die Fehler der Massenstücke werden vernachlässigt.

6.2 Nutation

1. Übernehmen Sie die Endwinkelgeschwindigkeiten ω aus dem vorigen Abschnitt und berechnen Sie den jeweiligen Drehimpuls L . Bestimmen Sie aus den experimentellen Werten von Ω_{nut} die entsprechenden Trägheitsmomente I_x und deren (gewichteten) Mittelwert sowie dessen Fehler.
2. I_x ist das Trägheitsmoment des gesamten Kreiselsystems (inkl. Achse und Kontergewichte) bezüglich Drehung um (oder Verkippung gegen) die vertikale Drehachse. Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_x mit Hilfe der Skizze in Abb. 9 und der von Ihnen gemessenen Werte für a_{40} , a_{900} , R_A und R_K . Sie erhalten das Gesamtträgheitsmoment I_x um die vertikale Drehachse als Summe der Einzelkomponenten (die 40 g und 900 g Kontergewichte, Figurenachse, Kreiselscheibe), wobei das Trägheitsmoment der Figurenachse $I_{\text{Achse}} = 3,77 \text{ g m}^2$ beträgt. Die Kreiselscheibe inkl. Spule hat eine Gesamtmasse von 1735 g. Eine Hilfe zur Berechnung von Trägheitsmomenten finden Sie in Teil 7.1. Wie gut stimmen die beiden Werte für I_x überein?

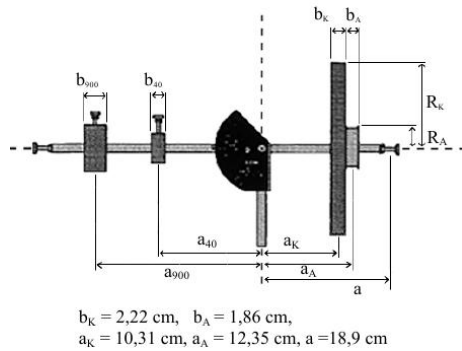


Abbildung 9: Abmessungen des Gyroskops.

6.3 Präzession

1. Übernehmen Sie ω für die Beschleunigungsmasse $m = 200 \text{ g}$ aus Teil 6.1. Tragen Sie $\frac{m_{\text{pr}} g a}{\omega}$ als Funktion von Ω_{pr} auf und bestimmen Sie aus der Steigung das Trägheitsmoment I_z .
2. Berechnen Sie mit den Daten aus Teil 6.2 das Trägheitsmoment der Kreisscheibe (bestehend aus Kunststoffscheibe und Aluminiumspule) bezüglich Drehung um die Figurenachse I_z . Vergleichen Sie alle drei für I_z erhaltenen Werte.

7 Anhang: Herleitung der Formeln

7.1 Berechnung von Trägheitsmomenten

Das Trägheitsmoment eines starren Körpers um eine gegebene Achse ist definiert als

$$I = \int r_{\perp}^2 \rho(\vec{r}) dV, \quad (7)$$

wobei r_{\perp} der kürzeste Abstand des Massenelementes $dm \equiv \rho(\vec{r}) dV$ (vgl. Anleitung zum Versuch M6 – Trägheitsmoment und Drehschwingungen) zur Rotationsachse ist. Solch eine Integration führt bei einem Zylinder (siehe Abb. 10) auf

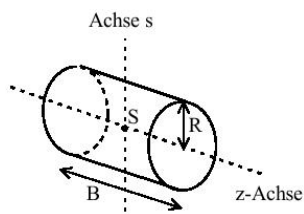


Abbildung 10: Homogener Zylinder der Dichte ρ mit Radius R , Länge B und Masse $m = \rho B \pi R^2$.

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2 \quad (8)$$

wenn man als Rotationsachse die Symmetrieachse z wählt. Rotiert man den Zylinder jedoch um eine dazu senkrechte Achse s durch den Schwerpunkt, so ist das Trägheitsmoment

$$I_s = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{B^2}{12} \right) .^5 \quad (9)$$

Versetzt man zusätzlich die Rotationsachse um den Abstand a aus dem Schwerpunkt, so gilt nach dem Steinerschen Satz

$$I_a = ma^2 + I_s = m \left(a^2 + \frac{R^2}{4} + \frac{B^2}{12} \right) . \quad (10)$$

Gleichung (10) braucht man zur Berechnung des Trägheitsmomentes I_x in Abschnitt 6.2. Überlegen Sie sich, welche Terme man in Gleichung (10) für großes a oder kleines B vernachlässigen kann.

7.2 Die Bewegungsgleichungen eines Kreisels ⁶

Die Bewegungsgleichung eines rotierenden Systems formuliert man, nach Einführung des Drehmomentes \vec{M} als die Ursache für eine Änderung seines Rotationszustandes ⁷ durch Identifizierung mit der zeitlichen Änderung des Drehimpulses

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} (\mathcal{I} \vec{\omega}) . \quad (16)$$

Obige Gleichung ist in einem *Inertialsystem* formuliert, d.h. in einem Koordinatensystem, welches sich geradlinig gleichförmig bewegt. Insbesondere rotiert es nicht (mit). Üblicher

⁵Aus Symmetriegründen sind die Trägheitsmomente um die x - und y -Achsen senkrecht zur Zylinderachse (z) identisch. Daher gilt offenbar $I_x \equiv \frac{1}{2} (I_x + I_y)$. Mit dem senkrechten Abstand zur i -Achse $r_{\perp}^2 = r^2 - r_i^2$ erhält man nach Gl. (7)

$$I_x = \frac{1}{2} \int (2r^2 - x^2 - y^2) \rho dV \quad (11)$$

$$= \frac{\rho}{2} \left(\int (x^2 + y^2) dV + 2 \int z^2 dV \right) \quad (12)$$

Mit Übergang zu der betrachteten Symmetrie angemessenen Zylinderkoordinaten (r_z, ϕ, z) mit $r_z^2 = (x^2 + y^2)$, $dV = r_z dr_z d\phi dz$ und $r^2 = r_z^2 + z^2$ erhält man

$$I_x = \frac{\rho}{2} \left(\int_{-B/2}^{B/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R (r_z^2 + 2z^2) r_z dr_z d\phi dz \right) \quad (13)$$

$$= \frac{\rho}{2} \left(\frac{\pi}{2} R^4 B + \pi R^2 \frac{2}{3} \left(\frac{B}{2} \right)^3 \right) \quad (14)$$

$$= m \left(\frac{1}{4} R^2 + \frac{1}{12} B^2 \right) . \quad (15)$$

⁶Dieses Kapitel ist wesentlich durch die schriftliche Nachbereitung des Studenten Benjamin Schmiegelt aus dem SS 2010 inspiriert.

⁷analog zur Kraft \vec{F} als Ursache für eine beschleunigte lineare Bewegung, die über den Hebelarm \vec{r} mit \vec{M} über das bereits eingeführte Kreuzprodukt \times via $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ zusammen hängt

Weise wählt man ein, bzgl. dem Massenmittelpunkt des betrachteten Kreisel ruhendes Inertialsystem. In diesem System sind nun die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ sowie das Trägheitsmoment \mathcal{I} zeitabhängige Größen. Zur Herleitung der Kreiselbewegung aus der Bewegungsgleichung (16) geht man daher zu dem körperfesten Bezugssystem (KS) über, welches mit dem Kreisel mit rotiert und dessen Koordinatenachsen mit den Hauptträgheitsachsen überein stimmen. Das hat den Vorteil, dass \mathcal{I} im KS zeitlich konstant und diagonal ist. Dies führt jedoch auch dazu, dass der Drehimpuls sich, außer durch das, bereits im IS vorhandene Drehmoment \vec{M} , zusätzlich durch die Drehung, welche durch die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ beschrieben wird ändert. Dies wird durch die *Eulerschen Kreiselgleichungen*

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L} \quad (17)$$

$$= \mathcal{I} \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (\mathcal{I} \vec{\omega}) \quad (18)$$

formuliert. Ausgeschrieben liest sich dies

$$M_x = I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z \quad (19)$$

$$M_y = I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x \quad (20)$$

$$M_z = I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y. \quad (21)$$

Für den vorliegenden Fall eines symmetrischen Kreisels mit $I_x = I_y$ reduziert sich dies zu

$$M_x = I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_x) \omega_y \omega_z \quad (23)$$

$$M_y = I_x \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x \quad (24)$$

$$M_z = I_z \dot{\omega}_z. \quad (25)$$

Im Folgenden wird die Nutation des symmetrischen Kreisels aus diesen Bewegungsgleichungen her geleitet.

7.3 Nutation

Ein kräftefreier Kreisel drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_z um seine Figurenachse und habe insgesamt den konstanten Drehimpuls $\vec{L} = \mathcal{I} \vec{\omega}$. Insbesondere liegt kein äußeres Drehmoment vor, sodass die Gln. (23-25) sich vereinfachen zu

$$0 = I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_x) \omega_y \omega_z \quad (26)$$

$$0 = I_x \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x \quad (27)$$

$$0 = I_z \dot{\omega}_z. \quad (28)$$

⁸Bemerkung: Eine kompakte Komponentendarstellung dieses Gleichungssystems erhält man durch Gebrauch des *total antisymmetrischen Tensor* ϵ_{ijk} und der *Einsteinschen Summenkonvention* als

$$M_i = I_{ii} \dot{\omega}_i + \epsilon_{ijk} \omega_j I_{jk} \omega_k. \quad (22)$$

Gl. (28) liefert die Information, dass sich die Komponente der Winkelgeschwindigkeit in Richtung der Figurenachse ω_z zeitlich konstant bleibt. Damit bietet sich für die verbleibenden Gln. (26-27) die Abkürzung Ω für die konstante Größe $\frac{I_x - I_z}{I_x} \omega_z$ an. Damit erhält man das folgende Differentialgleichungssystem

$$\dot{\omega}_x = -\Omega \omega_y \quad (29)$$

$$\dot{\omega}_y = \Omega \omega_x. \quad (30)$$

\vec{L} zeigt in Richtung der Figurenachse d.h. es gilt

$$\vec{L} = (0, 0, L_z) = (0, 0, I_z \omega_z) = I_z \omega_z \vec{e}_z \quad (31)$$

In diesem Fall bleibt die Figurenachse raumfest, d.h. $\omega_x = 0 = \omega_y$, da $\vec{\omega} = \vec{\omega}_F$ in Richtung der Figurenachse zeigt welche im KS gerade nach Vereinbarung die z -Achse auszeichnet. Gln. (29-30) liefern dann sofort – wie schon zuvor für ω_z – die zeitliche Konstanz von $\vec{\omega}$ mit $|\vec{\omega}| = \omega_z \equiv \omega_F$. Diesen Fall verschwindender Nutation nennt man den *schlafenden Kreisel*.

\vec{L} hat eine beliebige Richtung In diesem Fall besitzt L eine nicht verschwindende Komponente senkrecht zur Figurenachse, also

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) = (I_x \omega_x, I_x \omega_y, I_z \omega_z), \quad (32)$$

d.h. auch alle Komponenten von $\vec{\omega}$ verschwinden nicht. Damit sind die Gln. (29-30) nicht trivial zu lösen. Man findet eine Kreisbewegung senkrecht zur Figurenachse als Lösung, denn mit

$$\omega_x(t) = -A \cos(\Omega t + \psi) \quad (33)$$

$$\omega_y(t) = A \sin(\Omega t + \psi) \quad (34)$$

mit den Integrationskonstanten A und ψ sind die Gln. (29-30) offenbar erfüllt. Die Lösung ist also eine, der konstanten Rotationsbewegung des Kreisels um die Figurenachse überlagerte Drehbewegung dieser Figurenachse um die Achse des raumfesten Drehimpulses wie in Abb. 4 dar gestellt. $\Omega \equiv \Omega_{\text{nut}}$ ist dabei gerade die Kreisfrequenz dieser Nutationsbewegung. Der zugehörige Vektor $\vec{\Omega}$ ist parallel zu \vec{L} und zerlegt sich dem entsprechend auch genau so in Komponenten, d.h. $I_x = \frac{L_x}{\Omega_x} = \frac{L_z}{\Omega_z}$. Offenbar gilt für die Beträge $\Omega^2 = \Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2 =: \Omega_{\perp}^2 + \Omega_z^2$ sowie $L^2 = L_{\perp}^2 + L_z^2 = I_x \Omega_{\perp} + I_z (\Omega_z + \omega_z)$. Insbesondere identifiziert man die Integrationskonstante A in den Gln. (33-34) mit Ω_{\perp} . Damit erhält man folgende Beziehung für den Betrag des Drehimpulses.

$$L^2 = I_x^2 (\Omega_{\perp}^2 + \Omega_z^2) - (I_x \Omega_z)^2 + L_z^2 \quad (35)$$

$$= (I_x \Omega)^2. \quad (36)$$

Damit ist die für die Auswertung zu benutzende Beziehung (3) $L = I_x \Omega$ elementar hergeleitet.

Nun kann man obige Überlegungen sich anschaulich noch einmal wie folgt klar machen. Für einen beliebigen Zeitpunkt t wählen wir die y -Achse des körperfesten Koordinatensystems senkrecht zu der von \vec{L} und der z -Achse (wie zuvor in Richtung der Figurenachsse) aufgespannten Ebene. Dann gilt für die y -Komponente $L_y = I_y \omega_y = 0$ und es ist

$$\vec{L} = (L_x, 0, L_z) = (I_x \omega_x, 0, I_z \omega_z). \quad (37)$$

Figurenachsse (z -Achse), Drehimpuls \vec{L} und Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ liegen folglich immer

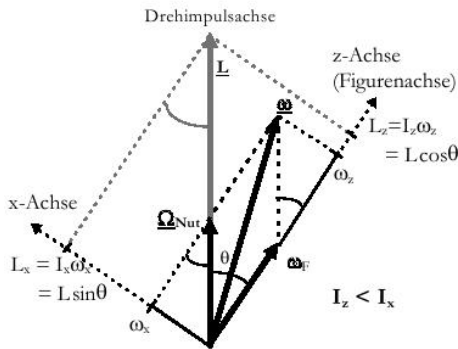


Abbildung 11: Zerlegung von $\underline{L} \equiv \vec{L}$ und $\underline{\omega} \equiv \vec{\omega}$ in Komponenten in Richtung der Figurenachsse (z -Achse, $\vec{\omega}_F$) und des Drehimpulses \vec{L} bzw. $\underline{\Omega}_{\text{nut}} \equiv \vec{\Omega}_{\text{nut}}$ für einen kräftefreien symmetrischen Kreisel mit $I_z < I_x$.

in einer Ebene, so dass $\vec{\omega}$ in den Richtungen von \vec{L} und der Figurenachsse in Komponentenvektoren zerlegt werden kann (s. Abb. 11).

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega}_{\text{nut}} + \vec{\omega}_F. \quad (38)$$

Die Punkte der Figurenachsse mit den Ortsvektoren $\vec{r} = (0, 0, r_z)$ besitzen die Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\Omega}_{\text{nut}} \times \vec{r}$ senkrecht zu \vec{L} und zur z -Achse ($\vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y$). Jeder Punkt der Figurenachsse durchläuft folglich einen Kreis senkrecht zum raumfesten Drehimpuls. Die Figurenachsse insgesamt bewegt sich auf dem Mantel eines Kegels, dem *Nutationskegel* (siehe Abb. 4), mit der Spitze im Drehpunkt und dem Öffnungswinkel θ zwischen Drehimpuls und Figurenachsse. Ebenso durchläuft auch der Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ einen Kegel, den *Rastpolkegel*.

Aus $L_x = I_x \omega_x$ mit $\omega_x = \Omega_{\text{nut}} \sin(\theta)$ und $L_x = L \sin(\theta)$ (s. Abb. 11) folgt für den Betrag von $\vec{\Omega}_{\text{nut}}$ – wie bereits oben her geleitet –

$$\Omega_{\text{nut}} = \frac{L}{I_x} \quad (39)$$

Obige Gleichung wird zur Bestimmung des Trägheitsmomentes senkrecht zur Figurenachsse benutzt.

7.4 Präzession

Zur Beschreibung der Bewegung eines Kreisels, auf den ein äußeres Drehmoment wirkt, betrachten wir den einfachen Fall einer nutationsfreien Präzessionsbewegung eines Kreisels.

Die Gravitationsbeschleunigung \vec{g} auf eine Zusatzmasse m_{pr} im Abstand a vom Fixpunkt des Kreisels auf der Figurenachse erzeugt das Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{a} \times m_{\text{pr}} \vec{g} \quad (40)$$

Da die Bewegung der Figurenachse mit der des Drehimpulses zusammenfällt, lassen sich die Bewegungsgleichungen gut im raumfesten Koordinatensystem IS lösen. Dabei sei nun $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ eine Einheitsvektorbasis des IS. Dazu bemerken wir, dass der Hebelarm parallel zum Drehimpuls gerichtet ist und somit $\vec{a} \parallel \vec{L}$ gilt. Damit ist jedoch nach Gl. (40) und der Eigenschaft des Kreuzproduktes $\vec{M} \perp \vec{L}$. Insbesondere ändert das angreifende Drehmoment nur die Richtung des Drehimpulses, so dass dessen Betrag L konstant bleibt. Damit schreiben sich die Bewegungsgleichungen unter Verwendung der Abkürzung Ω für die konstante Größe $\frac{a m_{\text{pr}} g}{L}$ und dem Vektor entsprechenden Betrages $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ unter Berücksichtigung der entgegengesetzten Orientierung der Erdbeschleunigung $\vec{g} = -g \vec{e}_z$

$$\Omega \times \vec{L} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (41)$$

oder in Komponenten

$$-\Omega L_y = \dot{L}_x \quad (42)$$

$$\Omega L_x = \dot{L}_y \quad (43)$$

$$0 = \dot{L}_z. \quad (44)$$

Wie schon bei den Lösungen der Gln. (29-30) führt dies auf die Lösung

$$L_x(t) = L_{\perp} \cos(\Omega t + \psi) \quad (45)$$

$$L_y(t) = L_{\perp} \sin(\Omega t + \psi) \quad (46)$$

$$L_z(t) = L_z. \quad (47)$$

Die auftretende Kreisfrequenz ist offenbar mit der der Präzessionsbewegung zu identifizieren, $\Omega \equiv \Omega_{\text{pr}}$, welche in der zu \vec{g} senkrechten Ebene statt findet.

Die Kreiselbewegung setzt sich also aus den Drehungen um die vertikale Achse (anti-)parallel zur Gravitationsbeschleunigung \vec{g} und um die Figurenachse zusammen, also

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\text{F}} + \vec{\Omega}_{\text{pr}}. \quad (48)$$

Betrachten wir nun noch einmal anschaulich – ähnlich wie bereits bei der Untersuchung der Nutationsbewegung – die Lage der Winkelgeschwindigkeitsvektoren. Dazu benutzen wir wieder die Darstellung im KS zum Zeitpunkt, in dem die y -Komponenten verschwinden. Dann spannen $\vec{\omega}_{\text{F}}$ und $\vec{\Omega}_{\text{pr}}$ die x - z -Ebene auf, welche folglich auch den Drehimpulsvektor enthält. Damit können wir Gl. (2) schreiben als $\vec{L} = \mathcal{I} \vec{\omega} = I_x \vec{\omega}_x + I_z \vec{\omega}_z$. Mit dem Winkel θ zwischen der Vertikalen ($\vec{\Omega}_{\text{pr}}$) und der Figurenachse ($\vec{\omega}_{\text{F}} \parallel z$ -Achse), wie in Abb. 12 skizziert, gilt $\vec{\Omega}_{\text{pr}} = \Omega_{\text{pr}} (\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_z)$. Damit kann der Drehimpulsvektor dargestellt werden als

$$\vec{L} = I_x \vec{\Omega}_{\text{pr}} + \left(1 + \frac{I_z - I_x}{I_z} \frac{\Omega_{\text{pr}}}{\omega_{\text{F}}} \cos(\theta) \right) I_z \vec{\omega}_{\text{F}}, \quad (49)$$

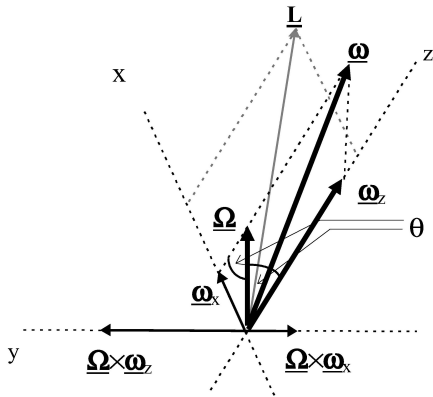


Abbildung 12: Vektorbeziehungen des präzessierenden symmetrischen Kreisels (Präzessionskreisfrequenzvektor $\vec{\Omega} \equiv \vec{\Omega}_{\text{pr}}$ und y-Achse liegen in der Papierebene).

was einer Zerlegung in $\vec{\Omega}_{\text{pr}}$ - und $\vec{\omega}_F$ -Richtung entspricht. Man sieht, dass der zweite Term in der Klammer verschwindet falls $\cos(\theta) = 0$ ist, d.h. $\vec{\Omega}_{\text{pr}} \perp \vec{\omega}_F$ und daher auf Grund der Kreiselsymmetrie $\vec{\Omega}_{\text{pr}}$ in Richtung einer Hauptträgheitsachse zeigt, oder falls $I_x = I_z$ ist, d.h. ein total symmetrischer Kreisel (Kugelkreisel) vorliegt. In diesem Versuch betrachten wir den ersten Fall, d.h. eine reine Präzessionsbewegung der Figurenachse in der Horizontalen. Damit reduziert sich der Ausdruck für den Drehimpuls zu

$$\vec{L} = I_x \vec{\Omega}_{\text{pr}} + I_z \vec{\omega}_F . \quad (50)$$

Außerdem erkennt man an Gl. (49), dass beim schnell rotierenden Kreisel (d.h. $\omega_F \gg \Omega_{\text{pr}}$ bei ähnlichen Trägheitsmomenten $I_x \simeq I_z$) der Drehimpuls praktisch parallel zur Figurenachse gerichtet ist, da dann $\vec{L} \simeq I_z \vec{\omega}_F$ ist.

Die differentielle Änderung des Drehimpulsvektors $d\vec{L} = \vec{M} dt$ steht senkrecht auf der von der Figurenachse (Richtung $\vec{a} \parallel \vec{L}$) und von \vec{g} aufgespannten Ebene und damit auch senkrecht zum Drehimpuls selbst. Damit ergibt sich nach Gl. (40) (mit $\vec{g} = -g (\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_z)$) sowie $\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$) das Drehmoment zu

$$\vec{M} = -\vec{e}_y \sin(\theta) a m_{\text{pr}} g . \quad (51)$$

Gemäß Gl. (41) ändert der Drehimpuls nur seine Richtung in Form einer Rotation des Dre-

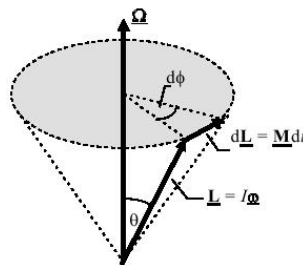
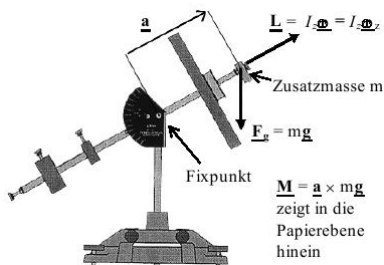


Abbildung 13: (links) Kraft und Drehmoment am Kreisel. (rechts) Präzessionsbewegung des rasch rotierenden symmetrischen Kreisels.

impulsvektors um die Vertikale mit der Präzessionskreisfrequenz $\vec{\Omega}_{\text{pr}} = \frac{d\phi}{dt}$ (s. Abb. 13), also

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega}_{\text{pr}} \times \vec{L} . \quad (52)$$

In der betrachteten Näherung erhält man durch Einsetzen in Gl. (50) für die zeitliche Änderung des Drehimpulses unter Verwendung von $\vec{\Omega}_{\text{pr}} \times \vec{\omega}_{\text{F}} = -\vec{e}_y \sin(\theta) \Omega_{\text{pr}} \omega_{\text{F}}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\vec{e}_y \sin(\theta) \Omega_{\text{pr}} I_z \omega_{\text{F}} \quad (53)$$

Durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung (16) erhält man schließlich die in der Auswertung verwendete Beziehung

$$m_{\text{pr}} g a = I_z \omega_{\text{F}} \Omega_{\text{pr}} \quad (54)$$

Beziehung (54) gilt nur für horizontal präzessierende oder näherungsweise für schnell rotierende symmetrische Kreisel. Unter dem Einfluss eines Drehmoments \vec{M} rotiert jeder Punkt der Figurenaxe mit der Winkelgeschwindigkeit Ω_{pr} auf einer Kreisbahn senkrecht zu \vec{g} . Die Figurenaxe insgesamt durchläuft den Mantel eines Kegels mit dem Öffnungswinkel θ und der Spitze im Fixpunkt.

8 Literatur

- Fehlerrechnung:
http://www.astro.uni-koeln.de/teaching_seminars/AP/
<http://www.ph2.uni-koeln.de/fileadmin/Lehre/Anfaengerpraktikum/Fehler.pdf>
- Meschede und Gerthsen: Physik, Springer, Berlin, 21. Aufl., 2002, Kapitel 2
http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html
- Tipler: Physik, Heidelberg, Spektrum, Akad. Verlag, 1994, Kapitel 8
- Demtröder: Experimentalphysik 1, Springer, 2001, Kapitel 5
http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html
- Bergmann-Schäfer: Lehrbuch der Experimentalphysik, de Gruyter, Kapitel 11
- Walcher, Elbel und Fischer: Praktikum der Physik, Vieweg+Teubner
- Wegener: Physik für Hochschulanfänger
- Zirnbauer: Skript zur Vorlesung Theoretische Physik I (Mechanik) vom WS 2000/1, Kapitel 3, zu finden unter
<http://www.thp.uni-koeln.de/StudentInfo/SkripteUebungen/skripte.html>

9 Sicherheitshinweise

Bitte beachten Sie die allgemeinen Sicherheitshinweise, die in der Praktikumseinleitung dargelegt wurden.

⁹Den allgemeinen Fall erhält man durch den zusätzlichen Faktor $\left(1 + \frac{I_z - I_x}{I_z} \frac{\Omega_{\text{pr}}}{\omega_{\text{F}}} \cos(\theta)\right)$ auf der rechten Seite der Gleichung.