

I. Physikalisches Institut
Universität zu Köln

M1 Mathematisches Pendel



PRAKTIKUM A FÜR NEBENFÄCHLER

Version vom 28. März 2022

Abzugeben bis: _____

Assistent: _____

Gruppenmitglieder: _____

Wichtige Informationen

Zur Bearbeitung ist es zwingend erforderlich, dass Sie sich mit den Grundlagen der Fehlerrechnung (u. a. Gaußsche Fehlerfortpflanzung, (gewichteter) Fehler des Mittelwerts, grafische Geradenanpassung) vertraut machen. Informationen dazu finden Sie beispielsweise im Dokument „allgemeine Hilfen für das Praktikum A“ auf der Webseite des A-Praktikums^a. Aufgrund des Umfangs dieses Versuchs ist es nötig die Blätter mittels Schnellhefter o. ä. zu binden. Bitte lochen Sie die Blätter und heften Sie diese sorgfältig ein. Sollte die Form der Abgabe nicht den Regularien entsprechen, kann die*der Assistent*in die Annahme der Auswertung verweigern.

Versuchen Sie innerhalb der vorgegebenen Lücken zu bleiben. Diese geben ungefähr den an entsprechender Stelle erwarteten Umfang vor. Sollte der Platz dennoch nicht ausreichen, fügen Sie ganze Blätter ein, auf welchen deutlich markiert ist, was wozu gehört.

Beachten Sie bitte, dass alle entsprechenden Lücken und Fragestellungen ausgefüllt und beantwortet werden müssen. Insbesondere sind Lücken bis hin zum Messprotokoll bereits vor dem Versuchstag zu bearbeiten. Dies müssen Sie vor Ort nachweisen und wichtige Inhalte frei wiedergeben können. Es wird davon ausgegangen, dass alle Gruppenmitglieder die vollständige Anleitung durchgelesen und verstanden haben. Sollten Sie am Versuchstag nicht ausreichend auf den Versuch vorbereitet sein, wird die*der Assistent*in Sie nicht am Versuch teilnehmen lassen.

Die Abgabe muss alle Seiten umfassen, insbesondere aber Seiten mit auszufüllenden Lücken. Dazu gehören in jedem Fall die Titelseite, die Vorbereitung, das Messprotokoll und die Auswertung mit Diskussion.

Alle auf dem Deckblatt aufgeführten Gruppenmitglieder sind für die Bearbeitung und fristgerechte Abgabe des Versuchsberichts bzw. dessen erforderlichen Korrekturen zuständig und verantwortlich. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass Sie sich mit den Regeln des A-Praktikums^a vertraut gemacht haben.

^a zu finden unter: <https://www.astro.uni-koeln.de/AP/>

Es ist nicht notwendig den Anhang mit auszudrucken. Allerdings kann dieser gerade bei Detailfragen enorm weiterhelfen und soll durchgelesen und verstanden sein.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Vorbereitung (zu Hause)	4
2.1	Allgemeine Begriffe	4
2.2	Mathematisches Pendel	4
3	Versuchsaufbau und -beschreibung	9
4	Benötigte Formeln	10
4.1	Idealisiertes mathematisches Pendel	10
5	Durchführung (im Praktikum)	11
6	Auswertung (zu Hause)	13
6.1	Pendellänge	13
6.2	Erdbeschleunigung	15
7	Diskussion	17
8	Literatur	18

1 Einleitung

Schwingungsprozesse spielen in der gesamten Naturwissenschaft eine gewichtige Rolle. Sowohl bei makroskopischen Anwendungen, wie mechanischen Uhren, als auch bei mikroskopischen Effekten, wie den Schwingungsmoden von Molekülen bilden die in diesem Versuch behandelten idealisierten Schwingungsprozesse die Grundlage unseres Verständnisses der Natur. Selbst bei an und für sich komplexen Systemen bzw. Problemen hat sich oftmals die idealisierte Annahme einer vollkommen harmonischen Schwingung, wie sie hier behandelt wird, als gute erste Näherung erwiesen und dabei geholfen unser Verständnis fundamentaler Prozesse im Kleinsten sowie im Größten zu verstehen.

Aufgrund dieser essentiellen Bedeutung soll daher die idealisierte Pendelschwingung in diesem Versuch untersucht und über ihre Gesetzmäßigkeit die Erdbeschleunigung g bestimmt werden. Wie Sie feststellen werden ist gerade die Bestimmung der Erdbeschleunigung g anhand des mathematischen Pendels ein ideales Beispiel dafür wie gut in manchen Fällen die sogenannte harmonische Näherung der tatsächlichen Größe einer Naturkonstanten entspricht.

2 Vorbereitung (zu Hause)

Bitte füllen Sie die folgenden Lücken für das Antestat aus. Diese überprüft der Versuchsbetreuer am Anfang des Versuches: nur Protokolle mit komplett ausgefüllten Antestaten können an dem Versuch teilnehmen!

2.1 Allgemeine Begriffe

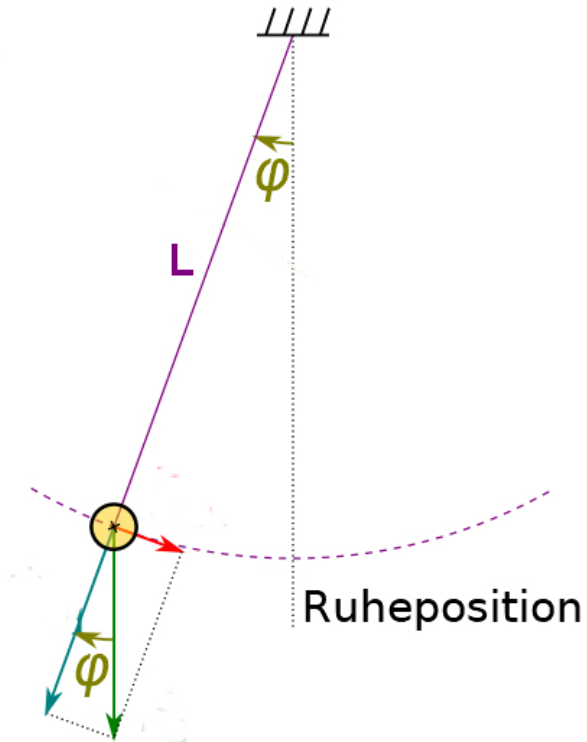
- Der Impuls $p = \underline{\hspace{2cm}}$ ist die Wucht eines Körpers mit der Masse m und der Geschwindigkeit v .
- Die kinetische Energie $E_K = \underline{\hspace{2cm}}$ wird in $\underline{\hspace{2cm}}$ gemessen.
- Die potentielle Energie $E_{pot} = \underline{\hspace{2cm}}$ nimmt nahe der Erde bei konstanter Erdbeschleunigung $g = \underline{\hspace{2cm}}$ und Masse m des Körpers linear mit ihrer $\underline{\hspace{2cm}}$ zu.

2.2 Mathematisches Pendel

- Nennen Sie zwei Beispiele aus Ihrem Fachbereich, wo Schwingungsprozesse eine wichtige Rolle spielen!
 - $\underline{\hspace{10cm}}$
 - $\underline{\hspace{10cm}}$

2.2. Mathematisches Pendel

- Zeichnen Sie die entsprechenden Kräfte (Zerlegung der Gravitationskraft in ihre tangentielle und radiale Kraftkomponente) an die Vektoren der Kräftezerlegung des mathematischen Pendels ein!



2.2. Mathematisches Pendel

- Wie lautet die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators?

$$\text{_____} \ddot{x}(t) = - \text{_____} x(t) \quad (2.1)$$

In der obigen Notation bedeutet dabei \ddot{x} die zweite Ableitung des Ortes x nach der Zeit t . Die obige Differentialgleichung kann mit dem vereinfachten Ansatz

$$x(t) = u \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (2.2)$$

gelöst werden. Dabei ist ω_0 die Eigenkreisfrequenz der Schwingung, u die Amplitude und φ der Phasenverschiebungswinkel. Nun erhält man für die zweite Ableitung nach der Zeit $\ddot{x} = \text{_____}$. Setzt man nun die zweite Ableitung \ddot{x} und die Funktion $x(t)$ in die obige Differentialgleichung ein und löst nach ω_0^2 auf, so erhält man für $\omega_0 = \text{_____}$.

- Ordnen Sie den Grafiken unten die harmonische ungedämpfte und gedämpfte Schwingung zu!

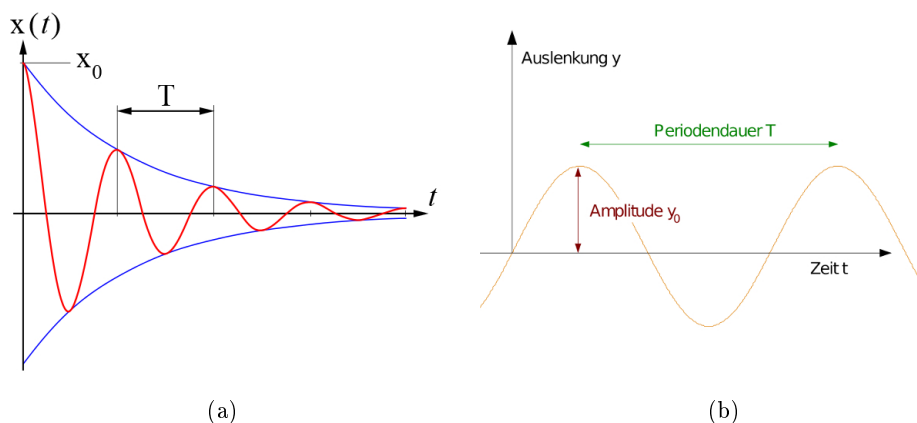


Abbildung 2.1: a) Hier bei handelt es sich um eine _____ Schwingung. Denn Ihre Amplitude nimmt mit zunehmender Zeit _____. b) Dies ist eindeutig eine _____ Schwingung. D.h. deren Amplitude/Ausschlag bleibt _____.

2.2. Mathematisches Pendel

- Analog zum harmonischen Oszillator kann man nun mit Hilfe der oben durchgeführten Kräftezerlegung die Differentialgleichung des mathematischen Pendels aufstellen und lösen. Man macht sich zu Nutze, dass man die auftretenden Kräfte nicht in Abhängigkeit ihrer Ortsfunktion $x(t)$ und $y(t)$ beschreibt (das Problem wäre dann tatsächlich 2-dimensional!), sondern in Abhängigkeit Ihrer Winkelfunktion $\varphi(t)$ - schließlich spielt sich die ganze Bewegung auf der Kreisbahn des Pendels mit konstanter Länge L statt, d.h. nur der Winkel φ ändert sich im Laufe der Zeit t bei diesem Lösungsansatz – der Physiker macht sich gerne das Leben durch solche Überlegungen einfacher!

Wenn man die Differentialgleichung nun aufstellen möchte, muss man sich überlegen, welche Kräfte das Pendel auf seiner Kreisbahn hält. Man kommt zum Schluss, dass die Tangentialkraft

$$F_{\text{tan}}(t) = m \cdot a_{\text{tan}}(t) = m \cdot L \cdot \ddot{\varphi}(t) \quad (2.3)$$

mit $a_{\text{tan}}(t) = L \cdot \ddot{\varphi}(t)$ im Gleichgewicht mit der Rückstellkraft

$$F_{\text{rs}}(t) = -mg \cdot \sin(\varphi(t)) \quad (2.4)$$

sein muss. Den Ausdruck für die Rückstellkraft erhält man aus der obigen Kräftezerlegung, indem man den trigonometrischen Zusammenhang

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \varphi(t)}{\text{Hypotenuse}} \quad (2.5)$$

ausnutzt, wobei die Hypotenuse der Gravitationskraft $F_G = -mg$ und die Ankathete der Rückstellkraft $F_{\text{rs}}(t)$ entspricht. Letztere kann man noch für den Fall, dass man nur kleine Winkeländerungen betrachtet – was in diesem Versuch eine gute Näherung ist – vereinfachen, womit man mit der *Kleinwinkelnäherung* $\sin(\varphi) \approx \varphi$ den Ausdruck $F_{\text{rs}}(t) = -mg \cdot \varphi(t)$ erhält.

Somit ergibt sich nun die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} mL\ddot{\varphi}(t) + mg \cdot \varphi(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{L} \cdot \varphi(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Diese lässt sich nun ähnlich wie der harmonische Oszillator mit dem Ansatz

$$\varphi(t) = \varphi_{\text{max}} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \alpha) \quad (2.7)$$

lösen. Leiten Sie nun den Ansatz zweimal ab, erhalten Sie:

$$\ddot{\varphi}(t) = \underline{\hspace{10em}} \quad (2.8)$$

Setzen Sie nun den Ansatz und dessen zweite Ableitung in die Differentialgleichung ein, so resümiert man für die Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = \underline{\hspace{10em}}$.

Nun wissen Sie wahrscheinlich aus Ihrer Physikvorlesung, dass Sie mit Hilfe der Eigenkreisfrequenz ω_0 einer Schwingung deren Eigen-Schwingungsdauer T_0 mit dem Zusammenhang

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (2.9)$$

2.2. Mathematisches Pendel

bestimmen können.

Somit erhalten Sie für die Erdbeschleunigung durch die vorangegangenen mathematischen und physikalischen Überlegungen:

$$g = \text{_____} \quad (2.10)$$

- Den Fehler von g können wir mit Hilfe der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung bestimmen:

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial L} \cdot \Delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T_0} \cdot \Delta T_0\right)^2} \quad (2.11)$$

Dabei bezeichnen Δg , ΔL und ΔT_0 die jeweiligen absoluten Fehler der Größen, von denen Sie letztere beide im Versuch annehmen. Wenn man nun die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial g}{\partial L} = \text{_____} \quad (2.12)$$

und

$$\frac{\partial g}{\partial T_0} = \text{_____} \quad (2.13)$$

bestimmt, so erhält man für den absoluten Fehler

$$\Delta g = \text{_____} \quad (2.14)$$

und für den relativen Fehler durch Teilen durch g :

$$\frac{\Delta g}{g} = \text{_____} \quad (2.15)$$

3 Versuchsaufbau und -beschreibung

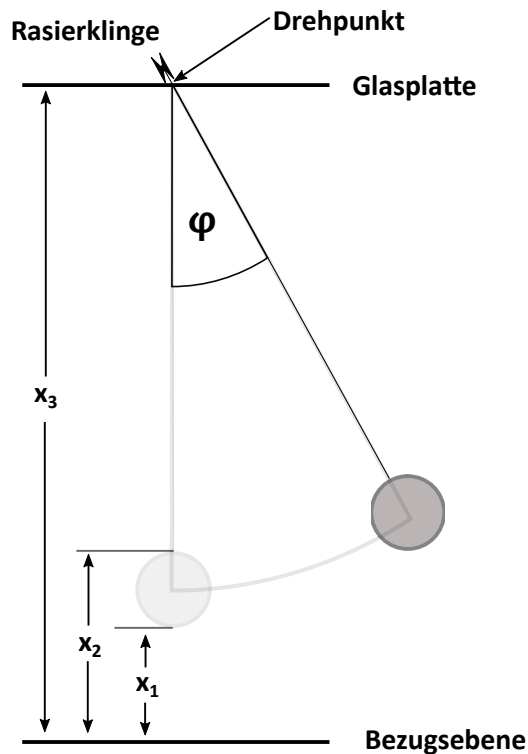


Abbildung 3.1: Skizze des Versuchsaufbaus

Eine Metallkugel der Masse m_K ist an einem dünnen Stahldraht mit Durchmesser = 0,1 mm frei schwingend aufgehängt. Um die Reibung zu minimieren, ist die Aufhängung durch eine Rasierklinge (**ACHTUNG! Verletzungsgefahr! Nur durch Assistent/Inn zu handhaben!**) auf einer Glasplatte realisiert.

Die Pendellänge L (Aufhängepunkt – Kugelmittelpunkt) wird mit einem sog. Kathetometer gemessen, die Periodendauer T_0 mit einer Stoppuhr.

4 Benötigte Formeln

4.1 Idealisiertes mathematisches Pendel

Die folgenden Formeln gelten für einen idealisierten Versuch (Massepunkt, kleine Auslenkung, kein Luftauftrieb, keine Reibungskräfte). Die Bewegungsgleichung für diesen Fall und die Approximation für kleine Auslenkungen ($\sin \phi \approx \phi$) führt auf die Formel für die Kreisfrequenz ω_0 und die Schwingungsdauer T_0 bzw. die Erdbeschleunigung g :

$$\omega_0^2 = g/L \quad (4.1)$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{L/g} \quad (4.2)$$

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T_0^2} \quad (4.3)$$

Der relative Fehler der Erdbeschleunigung ist dann

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T_0}{T_0}\right)^2}. \quad (4.4)$$

5 Durchführung (im Praktikum)

Bitte die unteren Punkte nacheinander abarbeiten:

1. Eingewöhnung

Spielen Sie mit der Versuchsanordnung, wobei Sie sich mit der Beobachtungstechnik vertraut machen und Fehlerquellen erkennen sollten.

2. Messen Sie die Pendellänge L

Die Pendellänge L messen Sie mit dem Kathetometer.

Das Kathetometer ist ein sehr empfindliches Messgerät! Betätigen Sie die Verstellerschrauben bitte gefühlvoll und wenden Sie am Endanschlag der Schrauben keine Gewalt an! Wenn sich die Rollen des Tisches mit dem Kathetometer auf den weiß markierten Rollbahnen des Fußbodens befinden sollte der richtige Fokus der Optik ungefähr in der Mitte des Verstellbereichs zu finden sein.

Das Kathetometer muss vor der Messung justiert (Wasserwaage) und während der Messung vor Störungen bewahrt werden. Sie lesen mit ihm 5 mal - jedesmal in der gleichen Reihenfolge - die folgenden Höhen ab: Höhe der Unterkante der Kugel (x_1), Höhe der Oberkante der Kugel (x_2), Aufhängung des Pendels (x_3) (vgl. Skizze). Schreiben Sie alle gemessenen Zahlen in die folgende Tabelle:

	$x_1[cm]$	$x_2[cm]$	$x_3[cm]$
1			
2			
3			
4			
5			

3. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer T

Die Periodendauer wird mit einer gewöhnlichen Stoppuhr gemessen. Alternativ ist es auch gestattet die Stoppuhr Ihres Smartphones zu verwenden. Hierbei sollten sie aber zu Beginn der Messungen überprüfen ob Ihr Start-Stopp-Fehler aufgrund der EMPfindlichkeit des Touch-Displays größer als die sonst üblichen 0,14 s ist. Um dies zu verifizieren sollten sie eine Messung möglichst schnell starten und stoppen. Im Idealfall sollten Sie sehr nah an den Idealwert heranreichen. Falls nicht sollten sie Ihre Unsicherheit bei den Zeitmessungen größer ansetzen. Messen Sie probeweise mehrmals die Periodendauer und vergleichen Sie ihre Werte. Der wesentliche Fehler bei solch einer Zeitmessung wird durch die Reaktion beim Starten (ca. 0,1 s) und beim Stoppen (ca. 0,1 s) verursacht, also zusammen etwa

$$\Delta T = \sqrt{(0,1 \text{ s})^2 + (0,1 \text{ s})^2} = 0,14 \text{ s} .$$

Indem man eine sehr grosse Zahl an Schwingungen misst, lässt sich daher der relative Fehler für **eine** Schwingung beliebig gering gestalten. In diesem Versuch sollen Sie die Zeit für 700 Schwingungen messen.

Das Abzählen von mehreren Hundert Schwingungen wird durch folgendes Verfahren erleichtert. Man misst zunächst die Zeit für 100 Schwingungen. Nun berechnet man aus dieser Zeit die sogenannte „Erwartungszeit“ für 200 Schwingungen. Einige Sekunden, bevor die Erwartungszeit erreicht ist, beginnt man die Zeitpunkte der Nulldurchgänge zu registrieren. Zweckmässigerweise signalisiert der eine Partner die Nulldurchgänge durch Klopfen während der andere die Uhr beobachtet. Nun obliegt es demjenigen, der die Uhr bedient, den Nulldurchgang auszumachen, welcher der erwarteten Zeit am nächsten kommt. Dies ist die „gemessene Zeit“ für 200 Schwingungen. Zählt man auf diese Zeit die gemessene Zeit von 100 Schwingungen hinzu, erhält man die Erwartungszeit von 300 Schwingungen etc. Auf diese Weise werden Abzählfehler vermieden. **Wichtig ist hierbei, dass immer nur Zwischenzeiten gestoppt werden und die Uhr im Hintergrund weiterläuft!** Durch wiederholtes Anwenden dieses Verfahrens erhält man so die gemessene Zeit für die gewünschten n Schwingungen. Schreiben Sie alle gemessenen Zahlen unmittelbar in die folgende Tabelle:

n Schwingungen	$T_{\text{berechnet}}[s]$	$T_{\text{mess}}[s]$
100		
200		
300		
400		
500		
600		
700		

AT:

_____ (Datum)

_____ (Unterschrift Versuchsassistenz)

6 Auswertung (zu Hause)

Bitte führen Sie zu jedem Wert eine Fehlerrechnung durch. Geben Sie alle verwendeten Formeln an und erläutern Sie kurz, was Sie tun und warum. Die korrekte Form zur Angabe von Ergebnissen, sowie Hinweise zur Fehlerrechnung entnehmen Sie bitte der *allgemeinen Hilfen für das Praktikum A* ¹.

6.1 Pendellänge

Aus den jeweiligen Mittelwerten \bar{x}_1 , \bar{x}_2 und \bar{x}_3 und deren Fehlern (Standardabweichung des Mittelwertes) bestimmen Sie die Pendellänge L .

Nutzen Sie:

$$\bar{x}_i = \frac{x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} + x_{i5}}{5} \quad (6.1)$$

$$\Delta\bar{x}_i = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2}{n(n-1)}} \quad (6.2)$$

$$r_{Kugel} = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{2} \quad (6.3)$$

$$L = \bar{x}_3 - \bar{x}_2 + r_{Kugel} \quad (6.4)$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung, dass sich folgende absolute Fehler für r_{Kugel} und L ergeben:

$$\Delta r_{Kugel} = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta\bar{x}_2^2 + \Delta\bar{x}_1^2} \quad (6.5)$$

$$\Delta L = \sqrt{\Delta\bar{x}_3^2 + \frac{5}{4}\Delta\bar{x}_2^2 + \frac{1}{4}\Delta\bar{x}_1^2} \quad (6.6)$$

¹https://teaching.astro.uni-koeln.de/sites/default/files/praktikum_a/allgemeine_Hilfen_Praktikum_A.pdf

6.1. Pendellänge





6.2 Erdbeschleunigung

Bestimmen Sie aus L und T_0 die Erdbeschleunigung g (inklusive Fehler) nach den Formeln (4.3) und (4.4):

$$g = \left(\quad \pm \quad \right) \quad (6.7)$$

Welcher Fehler überwiegt bei der Bestimmung von g , jener der Längenmessung oder der Zeitmessung?

In diesem Zusammenhang stellt sich ebenfalls die Frage wieviele Schwingungen Sie zählen hätten müssen, damit der relative Zeitfehler $\frac{\Delta T_0}{T_0}$ gegenüber dem unvermeidlichen relativen Längenfehler $\frac{\Delta L}{L}$ vernachlässigbar klein wäre. Dieser Fall ist insofern von Bedeutung, als dass dann die Ergebnisse Ihres Versuches die mit Ihrem Versuchsaufbau minimal möglichen Unsicherheiten aufweisen würden. Hierzu definieren Sie zunächst als Grenzwert den Fall wenn nur etwa ein Zehntel des relativen Fehlers $\frac{\Delta g}{g}$ durch $\frac{\Delta T_0}{T_0}$ ausgemacht würde. Dieser Fall lässt sich in folge dessen wie folgt definieren:

$$\left(\frac{\Delta g}{g} \right)_{\text{ohne } \Delta T} = \frac{9}{10} \left(\frac{\Delta g}{g} \right)_{\text{mit } \Delta T} \quad (6.8)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2} = \frac{9}{10} \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 + \left(2 \frac{\Delta T_0}{T_0} \right)^2} \quad (6.9)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 = \frac{81}{100} \left[\left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 + \left(2 \frac{\Delta T_0}{T_0} \right)^2 \right] \quad (6.10)$$

$$\Leftrightarrow \frac{19}{100} \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 = \left(2 \frac{\Delta T_0}{T_0} \right)^2 \quad (6.11)$$

$$\Leftrightarrow \frac{19}{200} \left(\frac{\Delta L}{L} \right) = \left(\frac{\Delta T_0}{T_0} \right) \quad (6.12)$$

6.2. Erdbeschleunigung

Die Unsicherheit der Periodendauer ΔT_0 ergibt sich aus dem Quotienten des Start-Stopp-Fehlers Ihrer Messung zur Anzahl an gemessenen Schwingungen n ($\Delta T_0 = \frac{\Delta T}{n}$). Setzen sie diesen Zusammenhang nun in Gleichung 6.12 ein und bestimmen durch Umformung der Gleichung und unter Verwendung Ihrer Messwerte die Anzahl an Schwingungen ab derer der Zeitfehler vernachlässigbar wird. Beantworten Sie ferner die Frage ob Sie im Rahmen Ihrer Messungen den Grenzwert erreicht haben und falls nicht ob es mit dem bestehenden Aufbau aus Ihrer Sicht möglich gewesen wäre.

7 Diskussion

Diskutieren Sie Ihr Ergebnis. Stimmt die gemessene Erdbeschleunigung innerhalb der statistischen Fehlergrenzen mit dem für Köln gültigen Wert $g = 9.8111 \text{ m/s}^2$ überein? Wenn nicht, warum nicht?

8 Literatur

- Fehlerrechnung:
<https://teaching.astro.uni-koeln.de/Fehlerrechnung.pdf>
- Kathetometer: <http://de.wikipedia.org/wiki/Kathetometer>
- Meschede und Gerthsen: Physik, Springer, Berlin, 21. Aufl., 2002
http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html
- Tipler: Physik, Heidelberg, Spektrum, Akad. Verlag, 1994
- Demtröder: Experimentalphysik Band 1, Springer Lehrbuch, 1995 (L DEM2)
http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html
- Westphal: Physikalisches Praktikum, Vieweg+Teubner
- Walcher, Elbel und Fischer: Praktikum der Physik, Vieweg+Teubner
- Wegener: Physik für Hochschulanfänger