

I. Physikalisches Institut
Universität zu Köln

M2 Gekoppelte Pendel



PRAKTIKUM A FÜR NEBENFÄCHLER

Version vom 26. Juni 2023

Abzugeben bis: _____

Assistent: _____

Gruppenmitglieder: _____

1 Einleitung

Gekoppelte Pendel sind zwei Pendel, die (z.B. durch eine Feder) verbunden sind und daher nicht unabhängig voneinander schwingen können. Haben die beiden Pendel dieselbe Schwingungsperiode T_0 , so kann durch die Kopplung Schwingungsenergie von einem Pendel auf das andere übertragen werden (und wieder zurück), und es kommt zu einer sogenannten Schwebung. Ein Festkörper (Kristall) besteht z.B. aus vielen gekoppelten Atomen, die um ihre Ruhelage schwingen können. Die Kopplung der Atome in dem Festkörper bewirkt eine effektive Wärmeübertragung.

Wichtige Informationen

Zur Bearbeitung ist es zwingend erforderlich dass Sie sich mit den Grundlagen der Fehlerrechnung (Gaußsche Fehlerfortpflanzung, (Gewichteter) Fehler des Mittelwerts, Grafische Geradenanpassung) vertraut machen.

Der Umfang dieses Versuchs macht es nötig, dass sie der Ordnung halber die Blätter mittels Schnellhefter o.ä. binden. Bitte lochen Sie die Blätter und heften Sie sie sorgfältig ein. Sollte die Form der Abgabe nicht den Regularien entsprechen wird die Auswertung durch den Assistenten verweigert werden.

Versuchen Sie innerhalb der vorgegebenen Lücken zu bleiben, diese geben den Umfang vor, der an entsprechender Stelle erwartet wird. sollte der Platz dennoch nicht ausreichen fügen Sie ganze Blätter ein.

Beachten Sie bitte, dass die Lücken und Fragestellungen im Abschnitt 2 vollständig zu beantworten, sowie alle fehlenden Formeln in Abschnitt 6 zu ergänzen sind und am Versuchstag vorgezeigt werden müssen. Es wird davon ausgegangen, dass alle Gruppenmitglieder die vollständige Anleitung durchgelesen und verstanden haben. Sollten Sie am Versuchstag nicht ausreichend auf den Versuch vorbereitet sein, wird die Assistentin/der Assistent Sie nicht am Versuch teilnehmen lassen.

Alle auf dem Deckblatt aufgeführten Gruppenmitglieder sind für die Bearbeitung und fristgerechte Abgabe des Versuchsberichts bzw. dessen erforderlichen Korrekturen zuständig und verantwortlich. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass Sie sich mit den Regeln des A-Praktikums^a vertraut gemacht haben.

^azu finden unter: <https://astro.uni-koeln.de/AP>

2 Vorbereitung (zu Hause, vor dem Versuchstag)

Die folgenden Stichpunkte und theoretischen Überlegungen sollen hier schriftlich bearbeitet werden. Außerdem sollten Sie in der Lage sein, sie am Versuchstag im Antestat selbstständig wiederzugeben. Weitere Hinweise zum Vorgehen bei den Herleitungen finden Sie in Abschnitt 8. Literaturhinweise gibt es in Abschnitt 9.

Machen Sie sich mit folgenden Begriffen und Gesetzmäßigkeiten vertraut:

2.1 Allgemeine Begriffe

Harmonische Schwingung

Durch welche Funktion bzw. Funktionen lässt sich die harmonische Schwingung beschreiben: —

Bitte geben Sie die Reihendarstellung bzw. Reihenentwicklung der beiden Funktionen an (Summenschreibweise):

Näherung von Sinus und Cosinus für kleine Winkel

Bitte geben Sie erneut die Reihenentwicklung von Sinus und Cosinus an. Diesmal geben Sie allerdings bitte die ersten 3 Terme an:

Die Näherung von Sinus und Cosinus wird in ziemlich jeder Naturwissenschaft angewendet. Bitte geben Sie in eigenen Worten an, was bei dem Schritt Reihenentwicklung – Näherung passiert. Im Detail: wann gilt $\sin(x) \approx x$ und $\cos(x) \approx 1$? Und was passiert mit der Reihenentwicklung?

2.1. Allgemeine Begriffe

Fehlerfortpflanzung

Es gibt keine fehlerfreien Messwerte. Jeder aufgenommene Messwert hat einen Fehlerbereich. Selbst das Ablesen der Uhr erfolgt nicht instantan. Stellen Sie sich folgendes Szenario vor:

1. Sie zählen/messen die Anzahl der Flugzeuge, die am Tag über den Kölner Dom fliegen. Sie tun dies an 3 aufeinanderfolgenden Tagen.
2. Sie zählen/messen die Zeit, die ein Flugzeug braucht, um über den Kölner Dom zu fliegen.

Welche Messgrößen treten hier auf? Sind diese für beide Fälle gleich? Erklären Sie in eigenen Worten die Unterschiede für die Fehler im Fall Nummer 1 und 2. Geben Sie die allgemeine Form der Gaußschen Fehlerfortpflanzung an:

2.2 Mathematisches Pendel

2.2.1 Bewegungsgleichung

In vielen Naturwissenschaften werden Bewegungsgleichungen benutzt, um ein beliebiges System zu einem beliebigen Zeitpunkt zu bestimmen. Die Grundlagen dafür sollten Sie sich am Beispiel eines einfachen Pendels veranschaulichen. Bitte vervollständigen Sie:

Die zeitliche Ableitung des Orts x nach der Zeit t ergibt: _____

Die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit v nach der Zeit t ergibt: _____

Bitte verinnerlichen Sie sich die Zusammenhänge von Ort x , Geschwindigkeit v und der Beschleunigung a mittels der SI-Einheiten.

In der Schule haben Sie gelernt, das für die Ableitung von $f(x) = x$ folgendes gilt: $f'(x) = y' = 1$. Mathematisch lässt sich dieser Zusammenhang auch folgendermaßen beschreiben: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 1$.

Nun werden in der Physik Systeme untersucht, die sich zeitlich ändern. Um die Ableitung einer beliebigen Funktion (z.B. f, v, a, g, \dots) nach der Zeit t hervorzuheben bzw. gegen die Ihnen bekannte Ableitung nach x abzugrenzen, wird einheitlich ein Punkt benutzt. Daher gilt für Ableitungen z.B. nach x : $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$. Für Ableitungen nach der Zeit t lässt sich schreiben: $\dot{f}(x) = \frac{df(x)}{dt}$. Ebenfalls gilt $v = \dot{x}$ und $a = \ddot{x}$ (machen Sie sich diesen Zusammenhang bitte kurz klar da diesbezüglich Fragen im Antestat gestellt werden können).

Vollständigkeithalber lässt sich die Integration über x mit $f(x) = \int x dx$ darstellen. Hier definiert dx einen Operator ähnlich $+, -, /, *$. Und genau wie die Rechenregeln für die Ihnen bekannten Operatoren, lässt sich $\frac{d}{dt}, \frac{d}{dx}, dx$ und dt "benutzen".

Wie lässt sich $F = m \cdot a$ auch schreiben? Benutzen Sie die neu erlernte Definition für a (wenn a

die zweite zeitliche Ableitung von x , dem Ort, ist): _____

Die allgemeine Form des Hookeschen Gesetzes für Federn lautet (benutzen Sie $-D_0, F$ und x):

Nun lässt sich D_0 auch folgendermaßen schreiben: $D_0 = \frac{mg}{L}$ Stellen Sie die Bewegungsgleichung

des mathematischen Pendels auf (Formel (8.1) dient als Vorlage): _____

2.2. Mathematisches Pendel

Eine Lösung der Bewegungsgleichung wäre

$$x(t) = a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t) , \quad (2.1)$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{D_0}{m} , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (2.2)$$

Erklären Sie, wie es dazu kommt und was die Zusammenhänge sind:

2.3 Gekoppelte Pendel

2.3.1 Grundschrwingungen und Schwebung

Bitte zeichnen Sie die Grundschrwingung und die Schwebung eines gekoppelten Pendels. Achten Sie auf die Achsenbeschriftungen und benutzen Sie ein Lineal für die dazugehörigen Achsen. Zeichnen Sie die Größen *Periode*, *Nullstellen*, *Minima* und *Maxima* ein.

2.3. Gekoppelte Pendel

2.3.2 Kopplung

Beschreiben Sie kurz, wie man von der Bewegungsgleichung eines Pendels zu den Bewegungsgleichungen für zwei gekoppelte Pendel (8.4) und (8.5) kommt. _____

_____ .

2.3.3 Entkoppeln

Was bedeutet das Entkoppeln der Differentialgleichungen zur Lösung physikalisch? Denken Sie dabei an das mathematische Pendel: _____

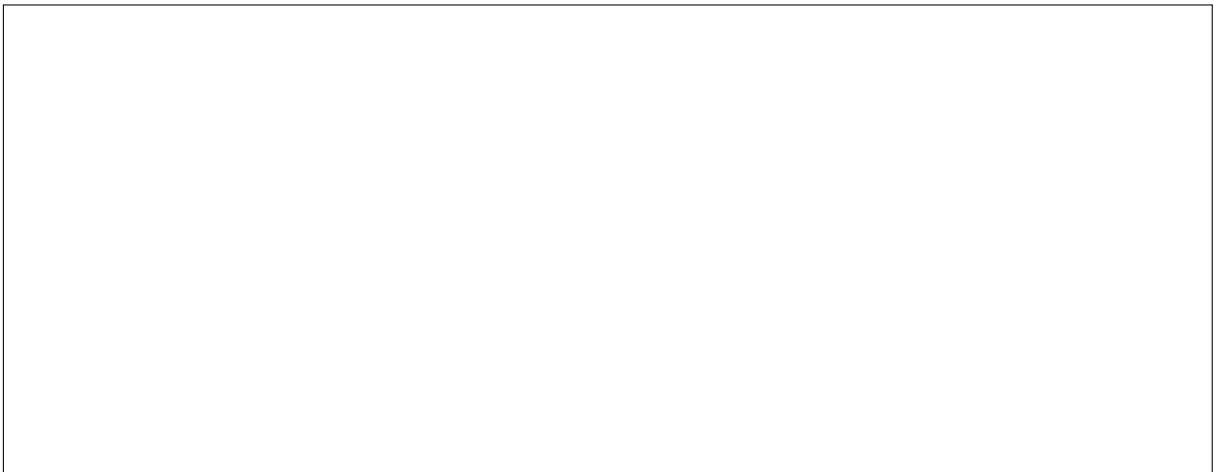
_____ .

2.3.4 Zeitlicher Verlauf

Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Amplituden der beiden Pendel. Erläutern Sie daran den Begriff der Schwebung:

2.4 Grafische Geradenanpassung

Ein schneller Weg um lineare Gesetzmäßigkeiten kleiner Mengen experimentell gemessener Werte zu bestimmen (die einen normalverteilten Fehler aufweisen) ist die grafische Geradenanpassung. Hierbei versucht man möglichst genau $2/3$ der Werte (Fehlerflächen) mit einer Geraden minimaler Steigung zu treffen und noch einmal $2/3$ der Werte mit einer Geraden maximaler Steigung. Nicht getroffene Fehlerflächen sollen dabei aber jeweils maximal im doppelten Fehlerabstand getroffen werden. Ausreißer müssen ggf. wegdiskutiert werden, hierbei hilft es sich Notizen während des Versuchs zu machen. Wenn man nun den Mittelwert (und den Fehler des Mittelwerts) der Steigungen beider Geraden bestimmt, erhält man die Steigung (und deren Fehlerwert). Damit man bei der Bestimmung der Steigungen beider eingezeichneten Geraden keine unnötigen Fehlerquellen schafft empfiehlt es sich die Steigungsdreiecke möglichst groß zu wählen. Man erhält so die Steigungen a_{min} und a_{max} . Deren Mittelwert \bar{a} und Fehler des Mittelwerts $\Delta\bar{a}$ ergibt sich (vereinfacht) zu:



3 Versuchsaufbau (zu Hause, vor dem Versuchstag)

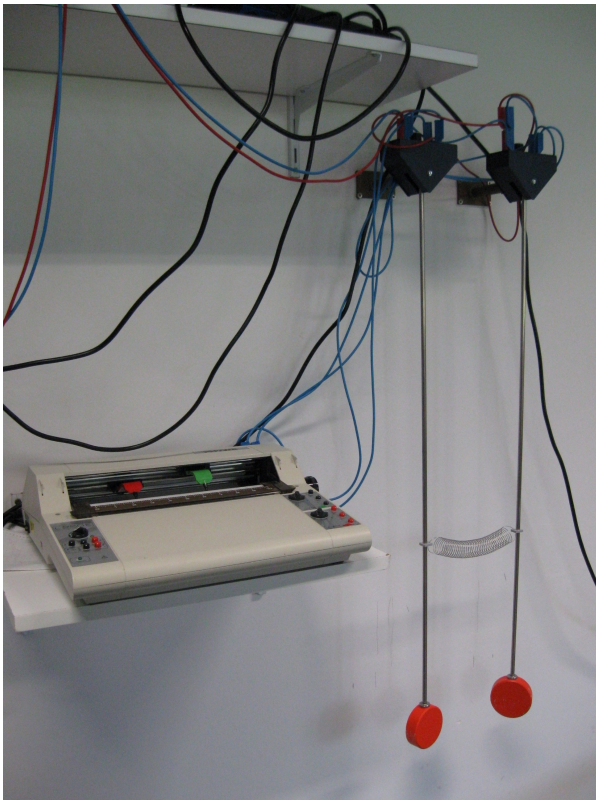


Abbildung 3.1: Foto des Versuchsaufbaus

Der Versuch besteht aus zwei Pendeln, die durch eine Feder gekoppelt sind. Die Stärke dieser Kopplung (sog. Kopplungsgrad) kann durch die Höhe der Feder eingestellt werden (Feder unten: hoher Kopplungsgrad, Feder weiter oben: kleiner Kopplungsgrad). Zur Aufzeichnung der Pendelbewegungen im Schwebungsfall sind beide Pendel an einen Schreiber angeschlossen. Der Schreiber zeichnet bei fester Papierlaufgeschwindigkeit die momentane Auslenkung jedes Pendels auf, so dass man den zeitlichen Verlauf der Amplituden später rekonstruieren kann.

3.1 Versuchsziel

Ziel des Versuchs ist es, experimentell den Zusammenhang _____

3.1. *Versuchsziel*

4 Benötigte Formeln

Hinweise zur Herleitung finden sich in Abschnitt 8 dieser Anleitung.

In diesem Versuch werden insgesamt fünf Schwingungsdauern T_i und die zugehörigen Frequenzen ω_i betrachtet. Die Bezeichnungen sind wie folgt:

freies Pendel:		$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$
Grundswingungen:	gleichsinnig	$\omega_{gl} = \frac{2\pi}{T_{gl}} = \omega_0$
	gegensinnig	$\omega_{geg} = \frac{2\pi}{T_{geg}}$
Schwebungsfall:	Schwebung	$\omega_S = \frac{2\pi}{T_S}$
	Schwingung	$\omega = \frac{2\pi}{T}$

Aus diesen Größen kann man den Kopplungsgrad k auf zwei Arten berechnen – dynamisch und im Schwebungsfall:

$$k_{dyn} = \frac{T_{gl}^2 - T_{geg}^2}{T_{gl}^2 + T_{geg}^2}, \quad (4.1)$$

$$k_{schweb} = \frac{2T_S T}{T_S^2 + T^2}. \quad (4.2)$$

Aus dem Kopplungsgrad k kann man die relative Frequenzaufspaltung $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_{geg} - \omega_{gl}}{\omega_{gl}}$ berechnen. Als Vereinfachung und um eventuelle Verwirrungen zu vermeiden, wird die relative Frequenzaufspaltung hier definiert als $\phi_{rel} := \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$. Sie ergibt sich aus dem Kopplungsgrad k als:

$$\phi_{rel} = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} - 1 \quad (4.3)$$

$$\approx k + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k^3, \quad (4.4)$$

wobei die letzte Zeile eine Näherung für kleine Kopplungsgrade bis zur dritten Ordnung in k ist. Um die relative Frequenzaufspaltung experimentell zu ermitteln gibt es wie bei k zwei Möglichkeiten:

$$\text{dynamisch:} \quad \phi_{rel} = \frac{T_{gl}}{T_{geg}} - 1, \quad (4.5)$$

$$\text{Schwebungsfall:} \quad \phi_{rel} = \frac{2T_0}{T_S}. \quad (4.6)$$

5 Durchführung (im Praktikum)

Dieser Versuchsaufbau enthält ein Netzteil und einen elektrisch betriebenen Schreiber, es gelten also die üblichen Verhaltensregeln für den Umgang mit Strom.

Informieren Sie bei Defekten an Bestandteilen des Aufbaus Ihren Betreuer und versuchen Sie nicht selbst Teile zu demontieren.

Bitte führen Sie die nachfolgenden Punkte nacheinander durch:

1. Eingewöhnung und Justage

Spielen Sie mit der Versuchsanordnung, wobei Sie sich mit der Beobachtungstechnik vertraut machen und Fehlerquellen erkennen sollten.

Bei dem Versuch sollten beide Pendel die gleiche Schwingungsdauer T_0 haben. Nehmen Sie die Kopplungsfeder ab und lassen Sie beide Pendel schwingen. Justieren Sie die Länge eines Pendels so lange, bis die Schwingungsdauern übereinstimmen.

Überprüfen Sie, ob beide Schreiberstifte die Pendelbewegung einwandfrei aufzeichnen, wenn nicht kontaktieren Sie Ihren Betreuer.

2. Messung

Geben Sie für alle gemessenen Größen die zugehörigen Fehler an.

- a) Bestimmen Sie die Schwingungsdauer T_0 eines Pendel ohne Kopplung.
Messen Sie dazu 5 Mal die Zeit für 20 Schwingungen für ein Pendel und berechnen Sie daraus T_0 inklusive Fehler.
- b) Messen Sie für drei verschiedene Kopplungen der Pendel (schwach - mittel - stark) jeweils folgende Schwingungsdauern:
Verschiedene Kopplungen der Pendel erhalten Sie durch verschiedene Höheneinstellungen der Kopplungsfeder. Wichtig: Justieren Sie die Feder nie ganz oben und nie ganz unten. Für jede der drei von Ihnen gewählten Kopplungen führen Sie die folgenden Messungen durch (gehen Sie die Punkte 2(b)i. bis 2(b)iii. für eine feste Kopplung durch, bevor Sie die Kopplung ändern). *Achten Sie bei allen Versuchsteilen darauf, dass die Kopplungsfeder nicht überdehnt wird.*
 - i. Gleichsinnige Schwingung:
Bestimmen Sie die Schwingungsdauer für die gleichsinnige Schwingung T_{gl} entweder aus den Ergebnissen zu 2a oder durch Messung analog zu 2a.
 - ii. Gegensinnige Schwingung:
Regen Sie das Pendelsystem zur gegensinnigen Grundschwingung an. Messen Sie die Zeit mit der Stoppuhr für 20 Schwingungen fünf Mal, um die Schwingungsdauer der gegensinnigen Schwingung T_{geg} (inkl. Fehler) bestimmen zu können.

iii. Schwebung:

Lenken Sie nur ein Pendel aus und versetzen Sie so das Pendelsystem in den Schwebungsmodus. Nutzen Sie für diese Teilaufgabe den angeschlossenen Schreiber. Lassen Sie den Schreiber für die starke und die mittlere Kopplung jeweils einen Bereich über 5 Schwebungen aufzeichnen, für die schwache Kopplung genügen 1 – 2 Schwebungen.

Notieren Sie sich die am Schreiber eingestellte Geschwindigkeit des Papiers, um daraus die Perioden T_S und T bestimmen zu können.

Messprotokoll

1. Bestimmung der Periodendauern T_0 der nicht gekoppelten Pendel

Bestimmen sie jeweils fünf mal die Zeit t für $n = 20$ Schwingungen der ungekoppelten Pendel:

Schwingungsdauer T_{20} [s]		
	Linkes Pendel	Rechtes Pendel
1		
2		
3		
4		
5		
Start-Stopp-Fehler [s]=		

2. Bestimmung der Schwingungsdauern für drei verschiedene Kopplungen der Pendel:

Wichtige Informationen

Achten Sie darauf dass der Kopplungsgrad erst verstellt wird wenn sowohl die Bestimmung der gegensinnigen Schwingungsdauern als auch die Schwebungsmessungen für den eingestellten Kopplungsgrad durchgeführt wurden!

a) Gleichsinnige Schwingung:

Der Idealfall einer gleichsinnigen Schwingung ist experimentell nur schwer zu erreichen und würden den Schwingungsdauern aus dem letzten Versuchsaufteil entsprechen. Daher können diese Werte für diesen Versuchsteil übernommen werden

b) Gegensinnige Schwingung:

Bestimmen sie jeweils fünf mal die Zeit t für $n = 20$ Schwingungen für jeweils drei verschiedene Kopplungsstärken des Pendels:

Schwingungsdauer T_{20} [s]			
	Schwache Kopplung (Feder oben)	Mittlere Kopplung (Feder mittig)	Starke Kopplung (Feder unten)
1			
2			
3			
4			
5			

c) **Schwebung:**

Nehmen Sie unter Verwendung des Amplitudenschreibers mindestens 5 Schwebungen (schwache Kopplung 1-2 Schwebungen) für alle drei Kopplungsgrade auf und notiere Sie sich die Schreibgeschwindigkeit unterhalb. Geben sie Ihren Messaufnahmen einen eindeutig indentigzierten Namen und tragen sie diesen in die untere Tabelle ein.

	Schwache Kopplung (Feder oben)	Mittlere Kopplung (Feder mittig)	Starke Kopplung (Feder unten)
$\frac{\text{mm}}{\text{s}}$			
Aufnahme			

AT: _____
 (Datum) (Unterschrift Versuchsassistenz)

6 Auswertung

Bitte führen Sie zu jedem Wert eine Fehlerrechnung durch. Geben Sie alle verwendeten Formeln an, sofern nicht schon angegeben. Zeichnen Sie Ihre Diagramme auf das hier enthaltene Millimeterpapier und beschriften Sie sie vollständig (zu welcher Aufgabe gehört das Diagramm?, was ist auf den Achsen aufgetragen?). Die korrekte Form zur Angabe von Ergebnissen, sowie Hinweise zur Fehlerrechnung entnehmen Sie bitte dem Dokument mit allgemeinen Hilfen von der AP-Webseite ¹.

6.1 Bestimmung der Schwingungsdauer der gleichsinnigen Schwingung

Bestimmen sie die Periodendauer T_{gl} der gleichsinnigen Schwingung für beide Pendel anhand der Messwerte in Abschnitt 1 ihres Messprotokolls. Bitte geben Sie zu jedem Einzelwert auch den dazugehörigen Fehler an. Beachten Sie hierbei dass sich auf Grundlage der Gaußschen Fehlerfortpflanzung der Fehler der Einzelmessungen ergibt sowie der Fehler Ihrer Mittelwerte aus der Standardabweichung der Mittelwerte. Tragen sie hierzu die gesuchten Fehlerformeln ein:

$$T_{gl,i} = \frac{T_{ges,i}}{n}$$

$$\Delta T_{gl,i} =$$

$$\bar{T}_{gl} = \frac{1}{n} \sum_i T_i$$

$$\Delta \bar{T}_{gl} =$$

¹<https://www.astro.uni-koeln.de/AP>

6.2. Bestimmung der Schwingungsdauer der gegensinnigen Schwingung

Tabelle 6.1: Eigenschwingungen des einzelnen Pendels

Periodendauer $T_{gl,i}$ des einzelnen Pendels		
#	Pendel links	Pendel rechts
1	±	±
2	±	±
3	±	±
4	±	±
5	±	±
Mittelwert inkl. Fehler		
	±	±

Basierend auf den Ergebnissen der vorangegangenen Tabelle ergibt sich die mittlere Periodendauer der gleichsinnigen Schwingung aus dem Mittelwert beider Pendel und ergibt:

\bar{T}_{gl}	±
----------------	---

6.2 Bestimmung der Schwingungsdauer der gegensinnigen Schwingung

Bestimmen Sie die Periodendauer T_{geg} der gegensinnigen Schwingung für alle Kopplungsgrade anhand der Messwerte in Abschnitt 2 ihres Messprotokolls. Bitte geben Sie zu jedem Einzelwert auch den dazugehörigen Fehler an. Beachten Sie hierbei, dass sich auf Grundlage der Gaußschen Fehlerfortpflanzung der Fehler der Einzelmessungen ergibt sowie der Fehler Ihrer Mittelwerte aus der Standardabweichung der Mittelwerte. Verwenden Sie demnach die Formeln, welche Sie auch im Fall der gleichsinnigen Schwingung verwendet haben.

Periodendauer $T_{geg,i}$ der einzelnen Kopplungsgrade			
	Schwache Kopplung (Feder oben)	Mittlere Kopplung (Feder mittig)	Starke Kopplung (Feder unten)
1	±	±	±
2	±	±	±
3	±	±	±
4	±	±	±
5	±	±	±
Mittelwert inkl. Fehler			
\bar{T}_{geg}	±	±	±

6.3 Bestimmung der Schwebungsdauern der Schwebungsmessungen

Bestimmen sie aus den Aufnahmen Ihrer Schwingungsmessungen die Periodendauer T_S der Einhüllenden sowie T der schwebenden Pendelseite für alle Kopplungsgrade. Berücksichtigen sie hierbei die Schreibgeschwindigkeit $v_{schreib}$ Ihrer Aufnahme. Eine Veranschaulichung der zu bestimmenden Parameter können sie in Abbildung 6.1 erkennen. Bitte geben Sie zu jedem Einzelwert auch den dazugehörigen Fehler an. Beachten Sie hierbei dass sich auf Grundlage der Gaußschen Fehlerfortpflanzung die Fehler der auftretenden Messgrößen ergeben.

$$T = \frac{L_{10} T [mm]}{10} \frac{1}{v_{schreib}}$$

$$\Delta T = \frac{\Delta L_{10} T [mm]}{10} \frac{1}{v_{schreib}}$$

$$\Delta T_S = \frac{\Delta L_{T_S} [mm]}{v_{schreib}}$$

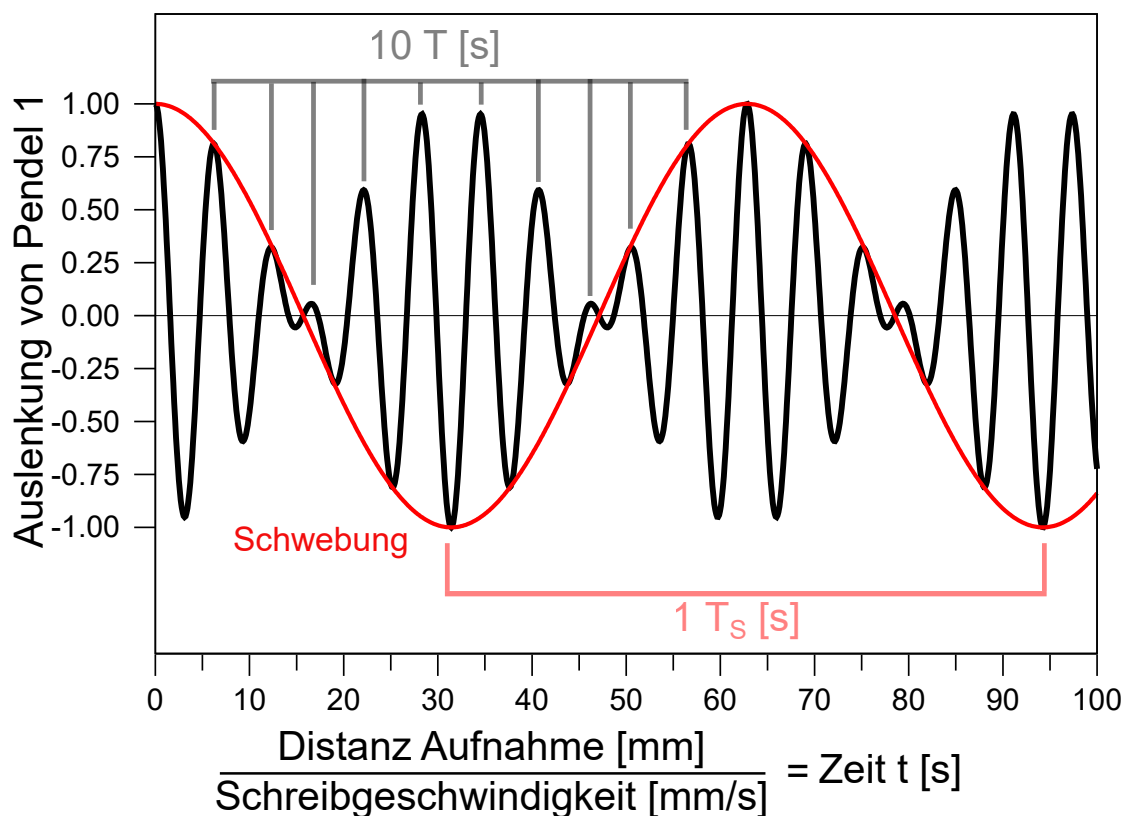


Abbildung 6.1: Die Überlagerung zweier Schwingungen mit leicht unterschiedlicher Frequenz führt zu einer Schwebung (schwarz), bei der die Einhüllende der Schwingung (rot) selbst eine Kreisfunktion ist. Die in diesem Auswertungsteil gesuchten Messgrößen sind hier bildlich veranschaulicht.

6.4. Bestimmung der Kopplungsgrade

	Schwache Kopplung (Feder oben)	Mittlere Kopplung (Feder mittig)	Starke Kopplung (Feder unten)
Aufnahme			
$v_{schreib}$ [mm/s]			
$L_{10 T}$ [mm]	±	±	±
T [s]	±	±	±
L_{T_S} [mm]	±	±	±
T_S [s]	±	±	±

6.4 Bestimmung der Kopplungsgrade

Bestimmen Sie den dynamischen Kopplungsgrad nach Gleichung (4.1) aus den Schwingungsdauern der Grundschwingungen T_{gl} und T_{geg} . Vereinfachen sie ferner die unten aufgelistete Fehlerformel des dynamischen Kopplungsgrades und geben in Folge dessen die Unsicherheiten Ihrer Ergebnisse an.

$$\begin{aligned}
 k_{dyn} &= \frac{T_{gl}^2 - T_{geg}^2}{T_{gl}^2 + T_{geg}^2} \\
 \Delta k_{dyn} &= \sqrt{\left(\frac{\partial k_{dyn}}{\partial T_{gl}} \Delta T_{gl}\right)^2 + \left(\frac{\partial k_{dyn}}{\partial T_{geg}} \Delta T_{geg}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{2T_{gl}(T_{gl}^2 + T_{geg}^2) - 2T_{gl}(T_{gl}^2 - T_{geg}^2)}{(T_{gl}^2 + T_{geg}^2)^2} \Delta T_{gl}\right)^2} \\
 &\quad + \left(\frac{-2T_{geg}(T_{gl}^2 + T_{geg}^2) - 2T_{geg}(T_{gl}^2 - T_{geg}^2)}{(T_{gl}^2 + T_{geg}^2)^2} \Delta T_{geg}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\dots}
 \end{aligned}$$

	Schwache Kopplung (Feder oben)	Mittlere Kopplung (Feder mittig)	Starke Kopplung (Feder unten)
k_{dyn}	±	±	±

6.4. Bestimmung der Kopplungsgrade

Bestimmen Sie nun den Schwebungs Kopplungsgrad nach Gleichung (4.2) aus den Schwingungsdauern der Einhüllenden T_S und des schwebenden Pendels T . Vereinfachen sie ferner die unten aufgelistete Fehlerformel des Schwebungs Kopplungsgrades und geben in Folge dessen die Unsicherheiten Ihrer Ergebnisse an.

$$\begin{aligned}
 k_{schweb} &= \frac{2T_S T}{T_S^2 + T^2} \\
 \Delta k_{schweb} &= \sqrt{\left(\frac{\partial k_{schweb}}{\partial T_S} \Delta T_S\right)^2 + \left(\frac{\partial k_{schweb}}{\partial T} \Delta T\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{2T(T_S^2 + T^2) - 2T_S T(2T_S)}{(T_S^2 + T^2)^2} \Delta T_S\right)^2} \\
 &\quad + \left(\frac{2T_S(T_S^2 + T^2) - 2T_S T(2T)}{(T_S^2 + T^2)^2} \Delta T\right)^2} \\
 &= \sqrt{\hspace{15em}}
 \end{aligned}$$

	Schwache Kopplung (Feder oben)	Mittlere Kopplung (Feder mittig)	Starke Kopplung (Feder unten)
k_{schweb}	\pm	\pm	\pm

6.5 Bestimmung der Relativen Frequenzaufspaltungen

Bestimmen Sie die dynamischen relativen Frequenzaufspaltungen nach Gleichung (4.5) aus den Schwingungsdauern der Grundschrwingungen T_{gl} und T_{geg} . Bestimmen sie ferner die zugehörige Fehlerformel mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung.

$$(\phi_{rel})_{dyn} = \frac{T_{gl}}{T_{geg}} - 1$$

$$\Delta(\phi_{rel})_{dyn} = \sqrt{\quad}$$

	Schwache Kopplung (Feder oben)	Mittlere Kopplung (Feder mittig)	Starke Kopplung (Feder unten)
$(\phi_{rel})_{dyn}$	\pm	\pm	\pm

Bestimmen Sie nun die relativen Frequenzaufspaltungen nach Gleichung (4.6) aus den Schwingungsdauern der Einhüllenden T_S und des schwebenden Pendels T ihrer Schwebungsmessungen. Bestimmen sie auch hier die zugehörige Fehlerformel mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung.

$$(\phi_{rel})_{schweb} = \frac{2T}{T_S}$$

$$\Delta(\phi_{rel})_{schweb} = \sqrt{\quad}$$

	Schwache Kopplung (Feder oben)	Mittlere Kopplung (Feder mittig)	Starke Kopplung (Feder unten)
$(\phi_{rel})_{schweb}$	\pm	\pm	\pm

6.6 Überprüfung der Gültigkeit der Näherungsfunktion

Wie in Abschnitt 4 dargelegt, lässt sich die relative Frequenzaufspaltung als Funktion des Kopplungsgrades definieren (siehe Gleichung 4.3). Hierfür finden sie dort ebenfalls eine Näherungsfunktion 4.4, welche sich aus einer Taylor Entwicklung der exakten Funktion ergibt. In den Naturwissenschaften ist es zuweilen von Nöten komplexe Funktion durch eine vereinfachte Näherung darzustellen, um zum Beispiel den Rechenaufwand für Simulationen zu minimieren. Die Gültigkeit eben jener Näherung ist hierbei von essentieller Bedeutung.

Überprüfen Sie daher die Gültigkeit der Näherungsfunktion für die relative Frequenzaufspaltung, indem Sie in einem Graphen die Näherungsfunktion sowie die exakte Funktion in Abhängigkeit des Kopplungsgrades, inklusive der von Ihnen bestimmten Werte (Kopplungsgrade), darstellen. Füllen Sie dazu die unten aufgeführte Wertetabelle für die beiden Funktionen im Bereich $0 \leq k < 1$ aus und zeichnen Sie damit die beiden Funktionsverläufe in *ein* Diagramm.

Vergleichen Sie Ihre Messergebnisse für die relative Frequenzaufspaltung mit der Theorie. Bestimmen sie hierfür die theoretischen Frequenzaufspaltungen unter Annahme ihrer ermittelten Kopplungsgrade und tragen die Ergebnisse in die letzten 3 Zeilen der Tabelle ein. Stellen Sie ferner Ihre experimentellen Ergebnisse gut sichtbar in den Graphen der Funktionsverläufe dar. Beachten Sie hierbei die korrekte Darstellung der Messunsicherheiten in Form der Fehlerbalken.

k	$(\phi_{\text{rel}})_{\text{exakt}}$	$(\phi_{\text{rel}})_{\text{Näherung}}$
0.05		
0.10		
0.15		
0.20		
0.25		
0.3		
0.35		
0.40		
0.45		
0.50		
0.55		
0.60		
0.65		
0.70		
0.75		
0.80		
0.85		
0.90		
0.95		
1.00		

6.6. Überprüfung der Gültigkeit der Näherungsfunktion

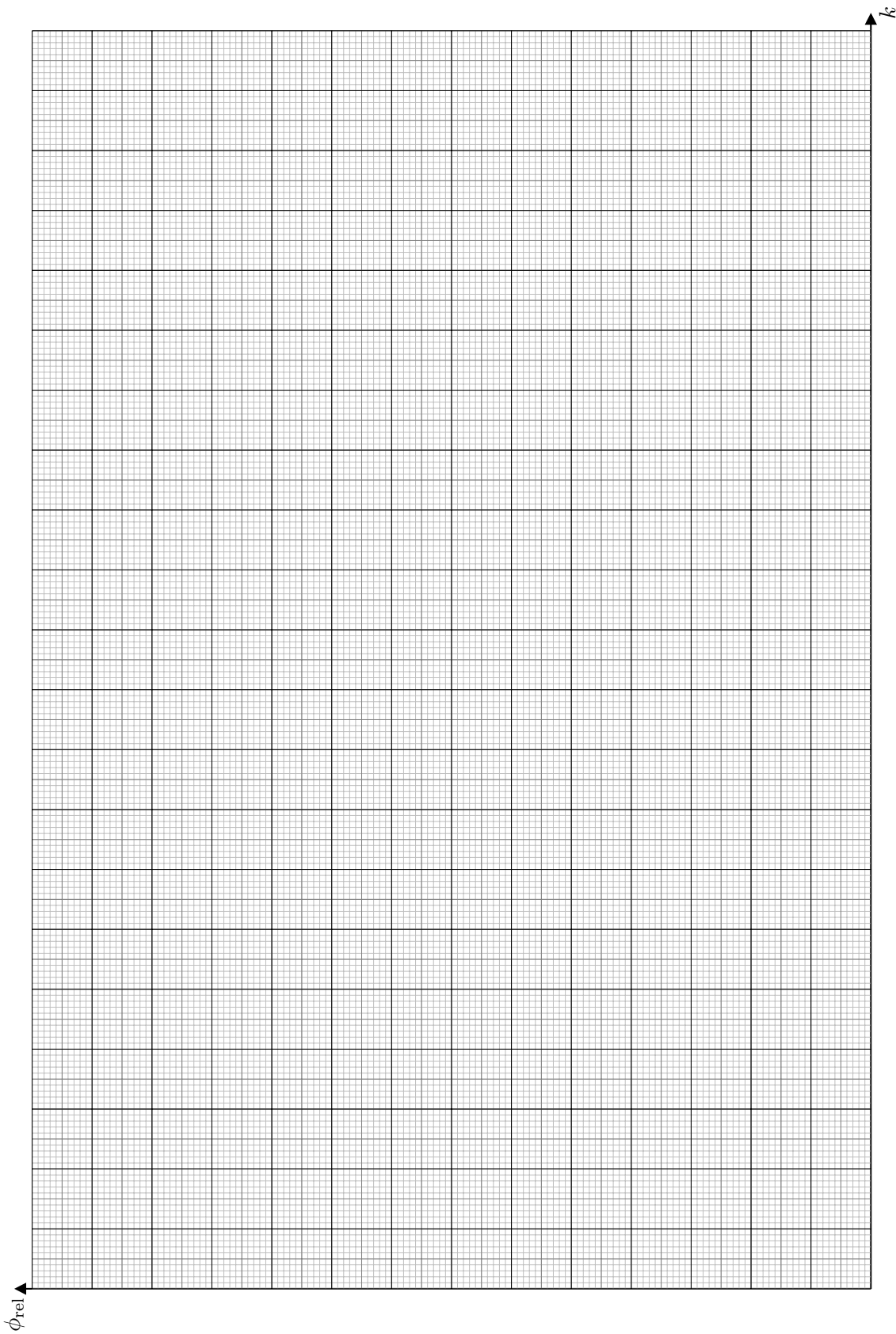


Abbildung 6.2: Relative Frequenzaufspaltung als Funktion des Kopplungsgrades

7 Diskussion der Ergebnisse (zu Hause)

Welchen Bereich von k halten Sie für die Näherung sinnvoll?

Fallen Ihre Messwerte in diesen Bereich? Falls nicht, diskutieren Sie die Ursachen!

Welche Wertepaare für $\phi_{\text{rel}}(k)$ erlauben es, die Qualität der Messung zu beurteilen – die, die auf der dynamischen Methode beruhen, oder die nach der Schwebungsmethode ermittelten?

Wie gut stimmen die Wertepaare mit der Vorhersage überein? Für welche Methode würden Sie die bessere Übereinstimmung erwarten?

Welche Fehlerquellen gibt es in diesem Versuch?

gesehen: _____
(Datum) (Unterschrift Versuchsassistenz)

Feedback

Hier ist nach Ihrem Feedback zu dieser Anleitung gefragt. Gibt es etwas, das Sie an der Versuchsanleitung inhaltlich oder technisch ändern würden? Ist beispielsweise etwas nicht oder unzureichend erklärt, Lücken zu klein, etc.? Änderungsvorschläge könnten schon für die nächsten Praktikumsteilnehmer umgesetzt werden.

8 Anhang: Hinweise zur Herleitung der Formeln

Zur Herleitung der für den Versuch benötigten Beziehungen machen wir folgende Annahmen:

1. Beide Pendel schwingen in parallelen Ebenen.
2. Sie haben die gleiche Masse m .
3. Sie schwingen einzeln (als freie Pendel) mit der gleichen Eigenfrequenz ω_0 .
4. Die Auslenkwinkel φ aus der Ruhelage seien stets so klein, dass $\sin \varphi = \varphi$ gesetzt werden kann und die Projektion der Pendelbewegung auf eine Koordinatenachse (z.B. x) anstelle des Auslenkwinkels betrachtet werden kann: $x = L \sin \varphi = L\varphi$.

8.1 Freies Pendel

Die Bewegungsgleichung für ein freies mathematisches Pendel lautet:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{mg}{L}x = -D_0x \\ \Leftrightarrow \ddot{x} &= -\frac{g}{L}x, \end{aligned} \quad (8.1)$$

wobei g die Erdbeschleunigung ist und L die Pendellänge. Die Zusammenfassung der Konstanten zu D_0 geschieht hier als Vorbereitung für die Betrachtung der gekoppelten Pendel. Die Lösung der Bewegungsgleichung lautet:

$$x(t) = a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t), \quad (8.2)$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{D_0}{m}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (8.3)$$

wobei ω_0 die Kreisfrequenz des freien Pendels ist und T_0 seine Schwingungsdauer.

8.2 Gekoppelte Pendel

Zusätzlich zur Erdbeschleunigung übt nun auch die Kopplungsfeder eine Kraft auf die Pendel aus. Diese Kraft hängt ab von der Richtgröße D_F der Feder und der Länge um die die Feder

8.2. Gekoppelte Pendel

gestaucht bzw. ausgedehnt wurde $(x_1 - x_2)$, wobei x_i die Auslenkung von Pendel P_i aus der Ruhelage bezeichnet. Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung der gekoppelten Pendel zu:

$$P_1 : \quad m\ddot{x}_1 = -D_0x_1 - D_F(x_1 - x_2) , \quad (8.4)$$

$$P_2 : \quad m\ddot{x}_2 = -D_0x_2 + D_F(x_1 - x_2) . \quad (8.5)$$

Diese gekoppelten Differentialgleichungen lassen sich mit Hilfe der Substitutionen

$$z_1 = x_1 - x_2 , \quad (8.6)$$

$$z_2 = x_1 + x_2 \quad (8.7)$$

entkoppeln und man erhält die unabhängigen Differentialgleichungen

$$\left(\omega_0^2 + \frac{2D_F}{m} \right) \cdot z_1 + \ddot{z}_1 = 0 , \quad (8.8)$$

$$\omega_0^2 \cdot z_2 + \ddot{z}_2 = 0 . \quad (8.9)$$

Grundschrwingungen

Die Variablen z_1 und z_2 beschreiben die beiden Grundschrwingungen der gekoppelten Pendel. Die zugehörigen Frequenzen kann man aus den Differentialgleichungen (8.8) und (8.9) unmittelbar ablesen:

1. Gegensinnige Bewegung:

Beide Pendel schwingen mit gleicher Amplitude, aber mit um π verschobener Phase. Es ist $x_1 = -x_2$ und folglich $z_2 = 0$. Aus Gleichung (8.8) ergibt sich für die Frequenz:

$$\omega_{geg} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2D_F}{m}} \quad (8.10)$$

$$= \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2D_F}{D_0}} . \quad (8.11)$$

Im Folgenden gehen wir immer von schwacher Kopplung aus, d.h. $D_F \ll D_0$. Unter Verwendung der Taylor-Entwicklung folgt somit als Näherung:

$$\omega_{geg} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{D_F}{D_0} \right) \quad (8.12)$$

2. Gleichsinnige Bewegung:

Beide Pendel schwingen mit gleicher Amplitude und gleicher Phase. Es ist $x_1 = x_2$ und folglich $z_1 = 0$. Aus Gleichung (8.9) ergibt sich für die Frequenz:

$$\omega_{gl} = \omega_0 , \quad (8.13)$$

d.h. das System schwingt mit der Eigenfrequenz der freien Pendel.

8.2. Gekoppelte Pendel

Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung erhält man als Linearkombination zweier linear unabhängiger spezieller Lösungen. Für die Grundschrwingungen ergibt sich damit:

$$z_1 = a_{geg} \sin(\omega_{geg}t) + b_{geg} \cos(\omega_{geg}t) , \quad (8.14)$$

$$z_2 = a_{gl} \sin(\omega_{gl}t) + b_{gl} \cos(\omega_{gl}t) . \quad (8.15)$$

Die Differenz zwischen den Frequenzen der beiden Grundschrwingungen bezeichnet man als Frequenzaufspaltung:

$$\Delta\omega = \omega_{geg} - \omega_{gl} \quad (8.16)$$

Schwebung

Als Schwebung bezeichnet man eine Pendelbewegung, die Anteile beider Grundschrwingungen z_1 und z_2 enthält. Die Bewegung der Pendel x_i ergibt sich aus den Grundschrwingungen zu:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2}(z_2 + z_1) \\ &= \frac{1}{2}[a_{geg} \sin(\omega_{geg}t) + b_{geg} \cos(\omega_{geg}t) + a_{gl} \sin(\omega_{gl}t) + b_{gl} \cos(\omega_{gl}t)] , \end{aligned} \quad (8.17)$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{2}(z_2 - z_1) \\ &= \frac{1}{2}[-a_{geg} \sin(\omega_{geg}t) - b_{geg} \cos(\omega_{geg}t) + a_{gl} \sin(\omega_{gl}t) + b_{gl} \cos(\omega_{gl}t)] . \end{aligned} \quad (8.18)$$

Durch die folgende Wahl der Anfangsbedingungen sind beide Grundschrwingungen zu gleichen Teilen in der Bewegung vorhanden,

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_0 , & x_2(0) &= 0 , \\ \dot{x}_1(0) &= 0 \quad \text{und} \quad \dot{x}_2(0) &= 0 \end{aligned} \quad (8.19)$$

so folgt:

$$\begin{aligned} b_{geg} &= b_{gl} = x_0 , \\ a_{geg} &= a_{gl} = 0 . \end{aligned} \quad (8.20)$$

Damit werden (8.17) und (8.18) zu:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}x_0 [\cos(\omega_{geg}t) + \cos(\omega_{gl}t)] , \quad (8.21)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}x_0 [\cos(\omega_{geg}t) - \cos(\omega_{gl}t)] . \quad (8.22)$$

Das kann man mithilfe zweier Additionstheoreme weiter vereinfachen. Es gilt nämlich:

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} , \quad (8.23)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} . \quad (8.24)$$

8.2. Gekoppelte Pendel

Damit ergibt sich (siehe auch Abbildung 8.1):

$$x_1(t) = x_0 \cos(\omega_S t) \cos(\omega t) , \quad (8.25)$$

$$x_2(t) = -x_0 \sin(\omega_S t) \sin(\omega t) , \quad (8.26)$$

mit

$$\omega_S = \frac{\omega_{geg} - \omega_{gl}}{2} , \quad (8.27)$$

$$\omega = \frac{\omega_{geg} + \omega_{gl}}{2} . \quad (8.28)$$

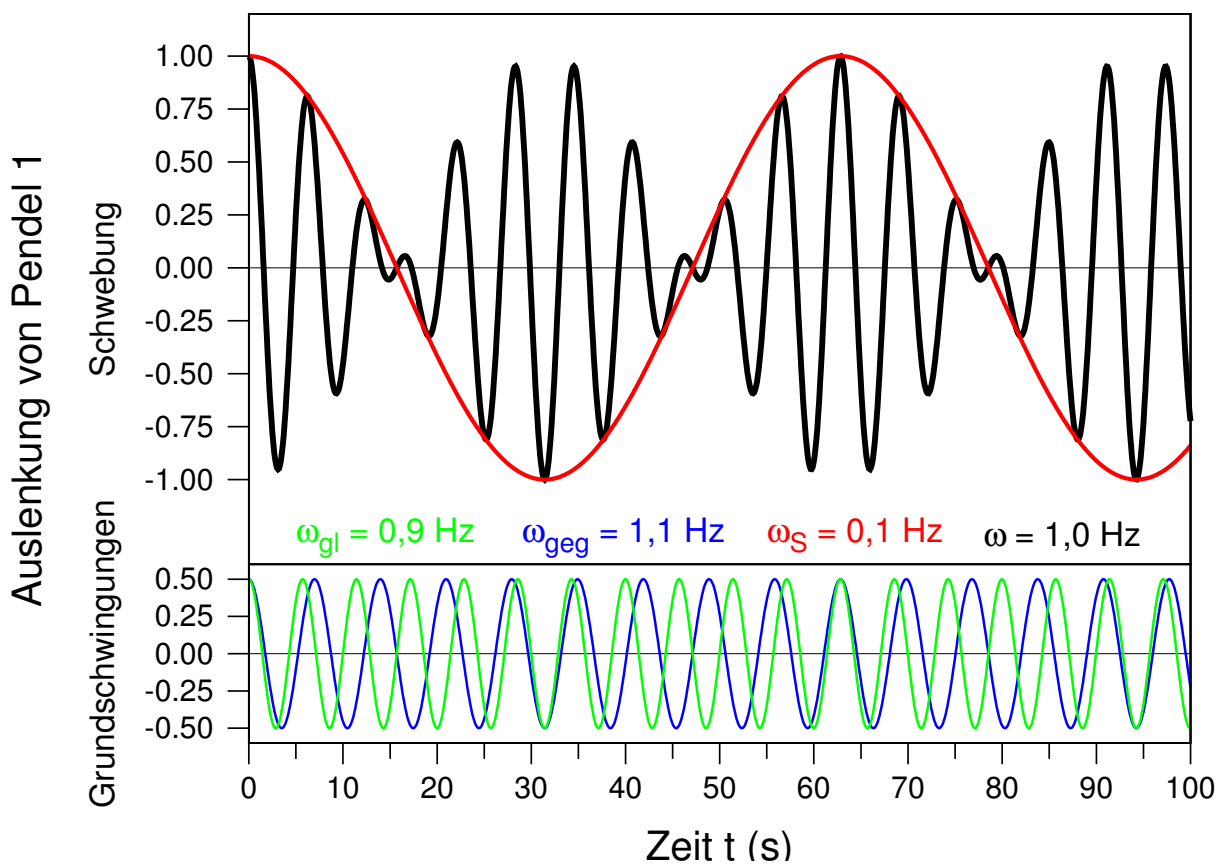


Abbildung 8.1: Die Überlagerung zweier Schwingungen mit leicht unterschiedlicher Frequenz (grüne und blaue Funktion im unteren Teil) führt zu einer Schwebung (schwarz), bei der die Einhüllende der Schwingung (rot) selbst eine Kreisfunktion ist.

Bei schwacher Kopplung gilt $D_F \ll D_0$. Daher unterscheiden sich ω_{geg} und ω_{gl} nur geringfügig und es gilt $\omega_S \ll \omega$. Die Faktoren

$$\cos(\omega_S t) \quad \text{und} \quad \sin(\omega_S t) \quad (8.29)$$

ändern sich nur langsam mit der Zeit und beschreiben die Oszillation der Amplitude (Einhüllende), während die jeweils anderen Faktoren die normale Schwingung der Pendel mit der Frequenz ω beschreiben. Aus den Frequenzen ω_S und ω ergeben sich die

$$\text{Schwingungsdauer: } T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (8.30)$$

und die

$$\text{Schwebungsdauer: } T_S = \frac{2\pi}{\omega_S} . \quad (8.31)$$

Kopplungsgrad

Der Kopplungsgrad ist definiert als

$$k = \frac{D_F}{D_0 + D_F} \in [0, 1] \quad (8.32)$$

Er kann aus den Grundschnwingungen bestimmt werden oder aus der Schwebung. Dabei gilt (vgl. Gl. (8.11) und (8.13) bzw. (8.3)):

$$m\omega_{geg}^2 = D_0 + 2D_F \quad (8.33)$$

$$m\omega_{gl}^2 = D_0 \quad (8.34)$$

Addition bzw. Subtraktion dieser beiden Gleichungen liefert:

$$m(\omega_{geg}^2 - \omega_{gl}^2) = 2D_F \quad (8.35)$$

$$m(\omega_{geg}^2 + \omega_{gl}^2) = 2(D_0 + D_F) \quad (8.36)$$

Durch Division ergibt sich daraus:

$$k = \frac{D_F}{D_0 + D_F} = \frac{\omega_{geg}^2 - \omega_{gl}^2}{\omega_{geg}^2 + \omega_{gl}^2} \quad (8.37)$$

Dies kann man umformen, so dass man den Kopplungsgrad dynamisch aus den Schwingungsdauern der Grundschnwingungen T_{gl} und T_{geg} oder im Schwebungsfall aus den Perioden T_S und T berechnen kann:

$$k_{dyn} = \frac{T_{gl}^2 - T_{geg}^2}{T_{gl}^2 + T_{geg}^2} , \quad (8.38)$$

$$k_{schweb} = \frac{2\omega_S\omega}{\omega_S^2 + \omega^2} = \frac{2T_S T}{T_S^2 + T^2} . \quad (8.39)$$

Relative Frequenzaufspaltung

Um die relative Frequenzaufspaltung $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ zu berechnen, stellen wir sie zunächst als Funktion des Kopplungsgrades dar. Man kann Gleichung (8.37) umformen zu:

$$k\omega_{geg}^2 + k\omega_{gl}^2 = \omega_{geg}^2 - \omega_{gl}^2 , \quad (8.40)$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_{geg}}{\omega_{gl}} = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} . \quad (8.41)$$

Damit folgt für die relative Frequenzaufspaltung:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_{geg} - \omega_{gl}}{\omega_{gl}} = \frac{\omega_{geg}}{\omega_{gl}} - 1, \quad (8.42)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} - 1. \quad (8.43)$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen nutzt man zwei Taylor-Entwicklungen für kleine Kopplungsgrade $k \ll 1$:

$$\sqrt{1+k} = 1 + \frac{1}{2}k - \frac{1}{8}k^2 + \frac{1}{16}k^3 + \dots \quad (8.44)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+k}} = 1 + \frac{1}{2}k + \frac{3}{8}k^2 + \frac{5}{16}k^3 + \dots \quad (8.45)$$

Als Näherung für die relative Frequenzaufspaltung bis zur dritten Ordnung in k erhält man damit:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx k + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k^3 \quad (8.46)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man nun die relative Frequenzaufspaltung für verschiedene Kopplungsgrade vorhersagen. Im Experiment bestimmt man sie allerdings direkt aus den gemessenen Schwingungsdauern. Hier unterscheidet man - wie beim Kopplungsgrad - den dynamischen Fall und den Schwebungsfall. Aus der Definition (8.42) folgt für den dynamischen Fall:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{T_{gl}}{T_{geg}} - 1. \quad (8.47)$$

Für den Schwebungsfall erhält man einen ähnlichen Ausdruck

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2T_0}{T_S}, \quad (8.48)$$

mit der Schwingungsdauer des freien Pendels T_0 und der Schwebungsdauer T_S .

9 Literatur

- Fehlerrechnung:
<https://www.astro.uni-koeln.de/AP>
- Demtröder: Experimentalphysik 1, Springer, 2008, Kapitel 11
http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html
- Meschede und Gerthsen: Physik, Springer, 2006, Kapitel 4
http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html
- Tipler: Physik, Heidelberg, Spektrum, Akad. Verlag, 1994
- Walcher: Praktikum der Physik