I. Physikalisches Institut
Universität zu Köln

M3a: Gedämpfter harmonischer Oszillator

Praktikum A für Nebenfächler

Version vom 14. Dezember 2020

Abzugeben bis:

Assistent:

Gruppenmitglieder:

Wichtige Informationen

Zur Bearbeitung ist es zwingend erforderlich, dass Sie sich mit den Grundlagen der Fehlerrechnung (u. a. Gaußsche Fehlerfortpflanzung, (gewichteter) Fehler des Mittelwerts, grafische Geradenanpassung) vertraut machen. Informationen dazu finden Sie beispielsweise im Dokument „allgemeine Hilfen für das Praktikum A“ auf der Webseite des A-Praktikums[a].
Aufgrund des Umfangs dieses Versuchs ist es nötig die Blätter mittels Schnellhefter o. ä. zu binden. Bitte lochen Sie die Blätter und heften Sie diese sorgfältig ein. Sollte die Form der Abgabe nicht den Regularien entsprechen, kann die*der Assistent*in die Annahme der Auswertung verweigern.
Versuchen Sie innerhalb der vorgegebenen Lücken zu bleiben. Diese geben ungefähr den an entsprechender Stelle erwarteten Umfang vor. Sollte der Platz dennoch nicht ausreichen, fügen Sie ganze Blätter ein, auf welchen deutlich markiert ist, was wozu gehört.
Beachten Sie bitte, dass alle entsprechenden Lücken und Fragestellungen ausgefüllt und beantwortet werden müssen. Insbesondere sind Lücken bis hin zum Messprotokoll bereits vor dem Versuchstag zu bearbeiten. Dies müssen Sie vor Ort nachweisen und wichtige Inhalte frei wiedergeben können. Es wird davon ausgegangen, dass alle Gruppenmitglieder die vollständige Anleitung durchgelesen und verstanden haben. Sollten Sie am Versuchstag nicht ausreichend auf den Versuch vorbereitet sein, wird die*der Assistent*in Sie nicht am Versuch teilnehmen lassen.
Die Abgabe muss alle Seiten umfassen, insbesondere aber Seiten mit auszufüllenden Lücken. Dazu gehören in jedem Fall die Titelseite, die Vorbereitung, das Messprotokoll und die Auswertung mit Diskussion.

Alle auf dem Deckblatt aufgeführten Gruppenmitglieder sind für die Bearbeitung und fristgerechte Abgabe des Versuchsberichts bzw. dessen erforderlichen Korrekturen zuständig und verantwortlich. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass Sie sich mit den Regeln des A-Praktikums[a] vertraut gemacht haben.

[a] zu finden unter: https://www.astro.uni-koeln.de/AP/

Es ist nicht notwendig den Anhang mit auszudrucken. Allerdings kann dieser gerade bei Detailfragen enorm weiterhelfen und soll durchgelesen und verstanden sein.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Der harmonische Oszillator ist ein Phänomen, das in der Physik an vielen Stellen behandelt wird. Er taucht aber auch in den anderen Naturwissenschaften und der Technik immer wieder auf. Ein grundlegendendes Beispiel hierfür sind die Verbindungen von mehreren Atomen zu Molekülen oder Festkörpern. Sie sind immer elastisch und daher als harmonische Oszillatoren zu behandeln. Aber auch auf deutlich größeren Skalen spielen Schwingungen eine Rolle, zum Beispiel bei Erdbeben oder der wind- und stoßsicheren Konstruktion von Gebäuden und Brücken oder bei der Entwicklung von Stoßdämpfern. Daher ist es von großer Bedeutung mit dem Verhalten schwingender Systeme unter verschiedensten Bedingungen vertraut zu sein und grundlegende mathematische Lösungsansätze zu kennen.

2 Vorbereitung (zu Hause)

Die folgenden Stichpunkte und theoretischen Überlegungen sind zentrale Bestandteile des Versuchs und sollten grundsätzlich gelernt und verstanden sein. Außerdem sollten Sie in der Lage sein, sie am Versuchstag im Antestat selbstständig wiederzugeben. Literaturhinweise gibt es in Abschnitt 8.

2.1 Allgemeine Begriffe

In diesem Versuch ist der harmonische Oszillator ein Drehpendel. Anders als zum Beispiel bei einer Masse an einer Feder findet die Bewegung hierbei nicht durch Translation statt, sondern durch Rotation. Um Drehbewegungen eines starren Körpers zu beschreiben, werden die Begriffe *Winkel, Winkelgeschwindigkeit* und *Winkelbeschleunigung* bezüglich einer Drehachse verwendet, mit den gemeinhin verwendeten Symbolen φ, ω und α. **Hinweis:** Für diesen Versuch ist es auf Grund der Eindimensionalität ausreichend, mit den skalarwertigen Beträgen der verwendeten Größen zu rechnen. Im Allgemeinen sind φ, ω und α Vektoren, die zusätzlich zu ihrem Betrag auch die Ausrichtung der Drehachse im Raum und den Drehsinn der Bewegung beschreiben.

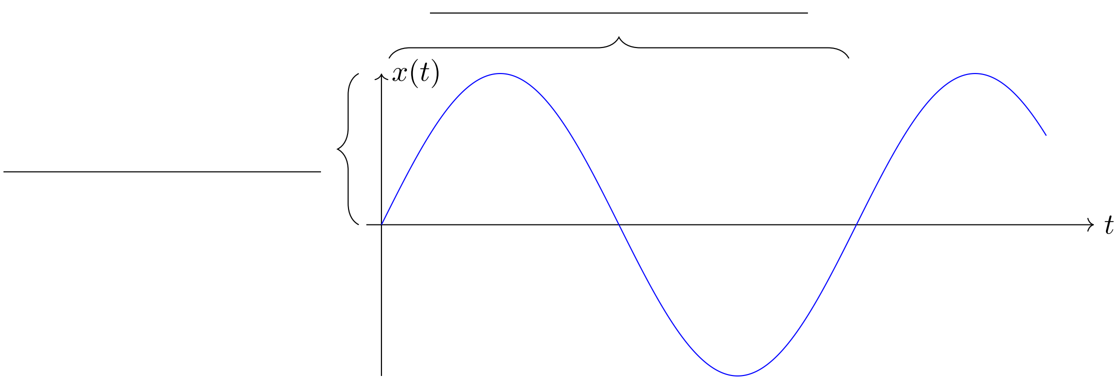
- Das Trägheitsmoment I ist ein Maß für den Widerstand, den ein Körper einer Änderung seiner ________________________________ entgegensetzt. Mathematisch ausgedrückt gilt: $M = I\ddot{\varphi}$. Das heißt ein Drehmoment M ist gleich dem Trägheitsmoment multipliziert mit der Winkelbeschleunigung. Eine sehr ähnliche Gleichung finden wir für Translationsbewegungen im 2. Newtonschen Axiom wieder: $F = ma$.

  In Analogie dazu nimmt das Drehmoment hier die Rolle der __________ ein und das Trägheitsmoment die Rolle der __________.
  Um das Trägheitsmoment I eines starren Körpers zu berechnen, muss man seine Massenverteilung sowie die Lage der betrachteten Rotationsachse kennen. Für einen Kör-

per, der modellhaft aus diskreten Massenpunkten m_i im Abstand r_i zur Drehachse zusammengesetzt ist, gilt:

$$I = \sum_i \underline{\hspace{4cm}}$$

- Die folgende Abbildung zeigt die Auslenkung einer harmonischen Schwingung in Abhängigkeit der Zeit. Im Wesentlichen wird diese Schwingung durch zwei Parameter charakterisiert. Beschriften Sie diese in der Abbildung.



- Die Eigenfrequenz eines schwingungsfähigen Systems ist die Frequenz, mit der es

  schwingt, wenn ____

  ____.

2.2 Wirbelstrombremse

In diesem Versuch wird zur Dämpfung der Schwingung einer Wirbelstrombremse verwendet. Um ihre Funktionsweise zu verstehen ist es nötig, sich mit dem Prinzip der elektromagnetischen Induktion vertraut zu machen.

- Die Lorentzkraft $\vec{F}_L$ ist die Kraft, die auf ____________ Ladungsträger in einem

  ________________ wirkt und sie dadurch von einer geradlinigen Bahn ablenkt. Sie lässt sich berechnen durch:

  $$\vec{F}_L = \underline{\hspace{4cm}},$$

  wobei q die Ladung bezeichnet, $\vec{v}$ die Geschwindigkeit und $\vec{B}$ die magnetischen Flussdichte.

- Änderungen der magnetischen Flussdichte in einem Leiter führen zu elektrischen Wirbelfeldern und induzieren damit einen Stromfluss. Dieser Stromfluss erzeugt wiederum selbst ein Magnetfeld. Die Lenzsche Regel macht eine Aussage über die Richtung des Stromflusses. Demnach wird der Stromfluss so induziert, dass ______________________

  ____

  ____

  Hier besteht das schwingende System aus einem Kupferring, der sich im Magnetfeld einer Gleichstromspule bewegt. Das Magnetfeld des Induktionsstroms im Kupferring bremst die Bewegung aufgrund der Lorentzkraft ab.

2.3 Harmonischer Oszillator

Die grundlegenste Art von Schwingungsbewegungen ist die harmonische Schwingung. Wird das System nach einmaliger Auslenkung sich selbst überlassen, so vollführt es eine freie Schwingung. Im Gegensatz dazu steht gibt es bei einer erzwungenen Schwingung eine zeitabhängige äußere Anregung, welche das System antreibt. Weiterhin müssen im Allgemeinen Dämpfungen, wie zum Beispiel durch Reibungskräfte verursacht, mit einbezogen werden. Im Folgenden sollen Sie sich mit der mathematischen Beschreibung dieser verschiedenen Fälle vertraut machen.
in harmonischer Oszillator ist ein schwingungsfähiges System, das abseits seiner Gleichgewichtslage eine Rückstellkraft erfährt, die ______________________ zur Auslenkung ist.

Die Rückstellkraft wird also durch das ______________________ Gesetz beschrieben. Wenn $\vec{x}$ die Auslenkung bezeichnet, hat diese Rückstellkraft die Form:

$$\vec{F} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

Aus dieser Bedingung folgt, dass die Auslenkung eines harmonischen Oszillators in Abhängigkeit der Zeit durch eine ______________- bzw. ______________funktion beschrieben werden kann.

2.4 Freie ungedämpfte Schwingung

Um die zeitliche Entwicklung der Pendelauslenkung $\varphi(t)$ aus den physikalischen Gegebenheiten herzuleiten betrachten wir zunächst noch einmal die allgemeine Bewegungsgleichung für die hier ausgeführte Rotationsbewegung:

$$M = I\ddot{\varphi}. \tag{1}$$

In diesem Versuchsaufbau wird das Drehmoment durch eine Spiralfeder erzeugt. Wird der Oszillator ausgelenkt, übt diese Feder ein rücktreibendes Drehmoment in Richtung der Ruhelage aus. Wenn wir den Fall einer idealen Feder annehmen, lässt sich die Größe dieses Drehmoments in nach dem Hookschen Gesetz beschreiben:

$$M = -D\varphi, \tag{2}$$

wobei mit D die Richtkonstante der Feder bezeichnet wird. Damit folgt aus den Gleichungen (1) und (2) die Bewegungsgleichung für das ungedämpfte Drehpendel:

$$\underline{\hspace{6cm}} \tag{3}$$

Hierbei handelt es sich um eine homogene lineare Differentialgleichung (DGL) 2. Ordnung. Die allgemeine Lösung dieser DGL erhält man durch die Linearkombination zweier linear unabhängiger Funktionen des fundamentalen Lösungssystems. Dabei gibt die Bewegungsgleichung vor, dass die Lösung $\varphi(t)$ so beschaffen sein muss, dass sie bis auf konstante Faktoren mit ihrer zweiten Ableitung $\ddot{\varphi}(t)$ übereinstimmt. Diese Bedingung wird von den Kreisfunktionen Sinus und Kosinus erfüllt und motiviert den Ansatz:

$$\varphi(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t). \tag{4}$$

Um daraus die spezielle Lösung für das hier betrachtete physikalische Problem zu erhalten, müssen die Parameter dieses Ansatzes so bestimmt werden, dass sie der DGL und gegebenen Anfangsbedingungen genügen. Dazu benötigen wir die zweite Ableitung des Ansatzes:

$$\ddot{\varphi}(t) = \underline{\hspace{15cm}}. \tag{5}$$

Setzen Sie den Ansatz und seine zweite Ableitung in die Bewegungsgleichung (3) ein und zeigen Sie, dass daraus Gleichung (6) folgt.

$$\Rightarrow -I\omega_0^2\varphi(t) + D\varphi(t) = 0. \tag{6}$$

Aus dieser Gleichung können wir nun die Größe ω_0 ablesen, welche der Eigenfrequenz des ungedämpften harmonischen Oszillators entspricht. In Abhängigkeit von I und D gilt:

$$\omega_0 = \underline{\hspace{3cm}}. \tag{7}$$

Weiterhin lässt sich damit die Periodendauer T_0 der Schwingung durch

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{8}$$

bestimmen.
Um die Konstanten a und b des Ansatzes zu ermitteln benötigen wir zwei Anfangsbedingungen. Als Startzeitpunkt $t = 0$ definieren wir den Moment, in dem wir das ausgelenkte Pendel loslassen. Dann hat es die Geschwindigkeit $\dot{\varphi}(0) = 0$ und eine beliebige Anfangsamplitude $\varphi(0) = A$. Aus diesen Bedingungen folgt, dass $a = A$ und $b = 0$ gelten muss. Damit ist die Lösung der Differentialgleichung:

$$\varphi(t) = A\cos(\omega_0 t). \tag{9}$$

2.5 Freie gedämpfte Schwingung

Bei der freien gedämpften Schwingung muss die Bewegungsgleichung des ungedämpften harmonischen Oszillators noch um einen Dämpfungsterm ergänz werden. Die Bewegungsgleichung lautet damit:

$$I\ddot{\varphi}(t) = -D\varphi(t) - k\dot{\varphi}(t). \tag{10}$$

Hierbei ist k ein Maß für die Stärke der Bremswirkung, die im vorliegenden Fall hauptsächlich vom Spulenstrom der Wirbelstrombremse abhängt. Weitere Effekte wie Luftreibung etc. tragen nur geringfügig zur Gesamtbremswirkung bei. Der Term $-k\dot{\varphi}(t)$ bedeutet,

dass das bremsende Drehmoment proportional zur ______________________ ist und

______________________ zur Bewegungsrichtung wirkt.
Die Bewegungsgleichung ist wieder eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung für $\varphi(t)$. Um sie zu lösen wählt man im Allgemeinen den sogenannten Exponentialansatz:

$$\varphi(t) = a \cdot e^{\lambda t}, \tag{11}$$

mit $A \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$. Den Parameter λ erhält man aus der Lösung der charakteristischen Gleichung dieser DGL:

$$\lambda^2 + \frac{k}{I}\lambda + \frac{D}{I} = 0 \tag{12}$$

Um die folgende Rechnung etwas übersichtlicher zu gestalten, fassen wir einige Parameter unter anderem Namen zusammen. Wir kennen bereits die Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften harmonischen Oszillators als und benutzen diese Bezeichnung nun auch hier. Außerdem führen wir die Dämpfungskonstante δ ein:

$$\frac{k}{2I} := \delta, \tag{13}$$

$$\sqrt{\frac{D}{I}} := \omega_0. \tag{14}$$

Lösen wir damit die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0, \tag{15}$$

folgt für λ:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \tag{16}$$

Mit $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} := \omega_f$ folgt daraus die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$\varphi(t) = a e^{\left(-\delta + \mathrm{i}\omega_f\right)t} + b e^{\left(-\delta - \mathrm{i}\omega_f\right)t} \tag{17}$$

Abhängig von ω_f, das heißt dem Verhältnis der Dämpfung des Systems und der Eigenfrequenz des ungedämpften Falls, ergeben sich drei qualitativ unterschiedliche Lösungen der Differentialgleichung. Man unterscheidet:

$\omega_0^2 - \delta^2 > 0$	$\Rightarrow \omega_f$ ist reell	„Schwingfall“
$\omega_0^2 - \delta^2 = 0$	$\Rightarrow \omega_f = 0$	„Aperiodischer Grenzfall“
$\omega_0^2 - \delta^2 < 0$	$\Rightarrow \omega_f$ ist rein komplex	„Kriechfall“

Diese drei Fälle sollen im Folgenden genauer betrachtet werden.

1. **Schwingfall**

   Hier gilt $\omega_0^2 - \delta^2 > 0$, also ist ω_f eine reelle Zahl. Für die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = A$ und $\dot{\varphi}(0) = -\delta A$ ergibt sich damit die Lösung:

$$\varphi(t) \quad = \quad A e^{-\delta t} \cos\left(\omega_f t\right) \ . \tag{18}$$

   Die cos-Funktion beschreibt die Oszillation, die e-Funktion das Abklingen und das schließliche Verlöschen der Amplitude.

   Man wundert sich hier vielleicht über die Wahl der Anfangsbedingungen. Intuitiver wäre sicherlich die Annahme, dass das Pendel ausgelenkt und losgelassen wird, also keine Anfangsgeschwindigkeit hat. Im Gegensatz zur ungedämften Schwingung würden solche Anfangsbedingungen hier aber nicht zu einer rein Kosinusförmigen Bewegung führen, sondern man erhielte auch einen geringen Sinusbeitrag. Um den Rechenaufwand geringer zu halten empfiehlt es sich bei der gedämpften Schwingung, den Zeitpunkt $t = 0$ so zu wählen, dass nur der Kosinusterm übrig bleibt. Das bedeutet, man wählt den Zeitpunkt als Anfang, an dem die Kurve der gedämpften Schwingung die einhüllende Exponentialfunktion berührt. Dies geschieht nicht im Umkehrpunkt des Pendels, sondern ein bischen rechts davon (siehe Abbildung 1). Es muss also eine Anfangsgeschwindigkeit angenommen werden.

   - Zeigen Sie nun, dass für die Dämpfung gilt:

$$\delta = \frac{1}{n_e T_f}, \tag{19}$$

     wobei $T_f = \frac{2\pi}{\omega_f}$ die Schwingungsdauer der freien gedämpften Schwingung ist. Bei der Größe n_e handelt es sich um die Anzahl der Schwingungen, nach denen die Amplitude von A auf A/e abgenommen hat.

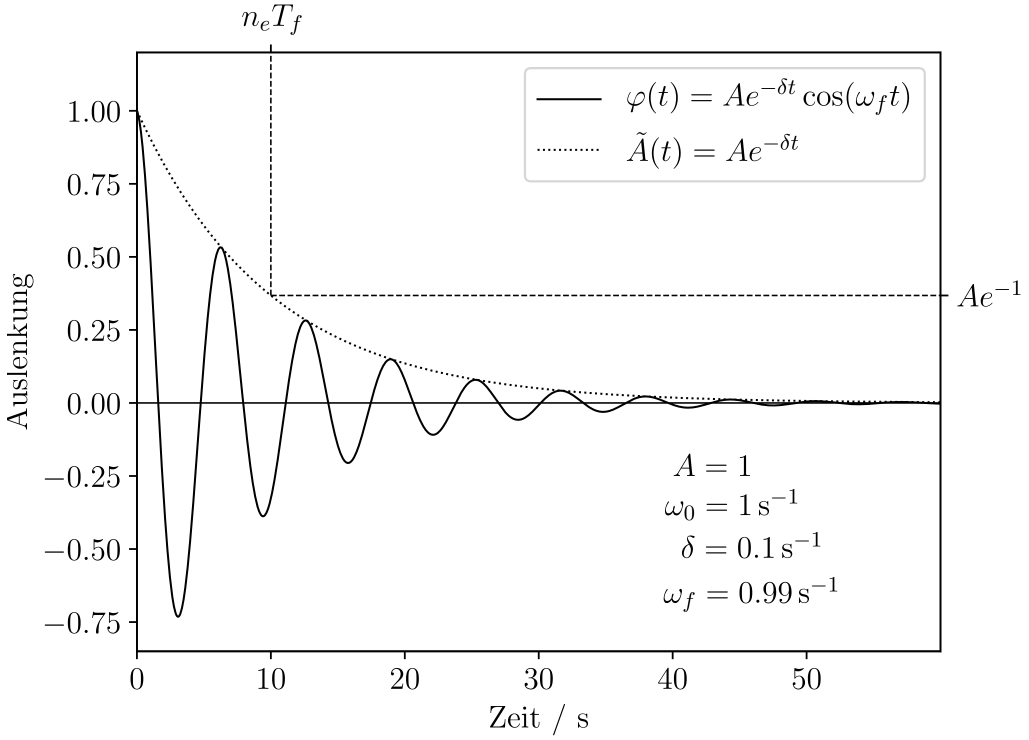


Abbildung 1: *Abnahme der Amplitude mit der Zeit im Schwingfall*

- Wenn der zeitliche Verlauf der Amplitude durch $Ae^{-\delta t}$ gegeben ist, nach welcher Zeit t ist dann die Schwingungsamplitude auf den Bruchteil $\frac{1}{2}$ der Anfangsamplitude abgeklungen? Lösen Sie also die Gleichung:

$$Ae^{-\delta t} = \frac{1}{2}A.$$

2. **Aperiodischer Grenzfall**

Hier gilt $\omega_f = 0$. Als Lösung für die Bewegungsgleichung erhält man:

$$\varphi(t) = (a + bt) \cdot e^{-\delta t} \ . \tag{20}$$

Für die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = A$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ ergibt sich damit die Lösung:

$$\varphi(t) = A\,(1 + \delta t) \cdot e^{-\delta t} \ . \tag{21}$$

3. **Kriechfall**

Hier gilt $\omega_0^2 - \delta^2 < 0$, also ist ω_f eine rein komplexe Zahl, $\mathrm{i} \cdot \omega_f = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ dagegen ist reell. Als Lösung für die Bewegungsgleichung erhält man:

$$\varphi(t) = a \cdot e^{\left(-\delta + \mathrm{i}\omega_f\right)t} + b \cdot e^{\left(-\delta - \mathrm{i}\omega_f\right)t} \ . \tag{22}$$

Für die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = A$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ ergibt sich damit die Lösung:

$$\varphi(t) = Ae^{-\delta t}\left(\cosh\left(\mathrm{i}\omega_f t\right) + \frac{\delta}{\mathrm{i}\omega_f}\sinh\left(\mathrm{i}\omega_f t\right)\right) \ . \tag{23}$$

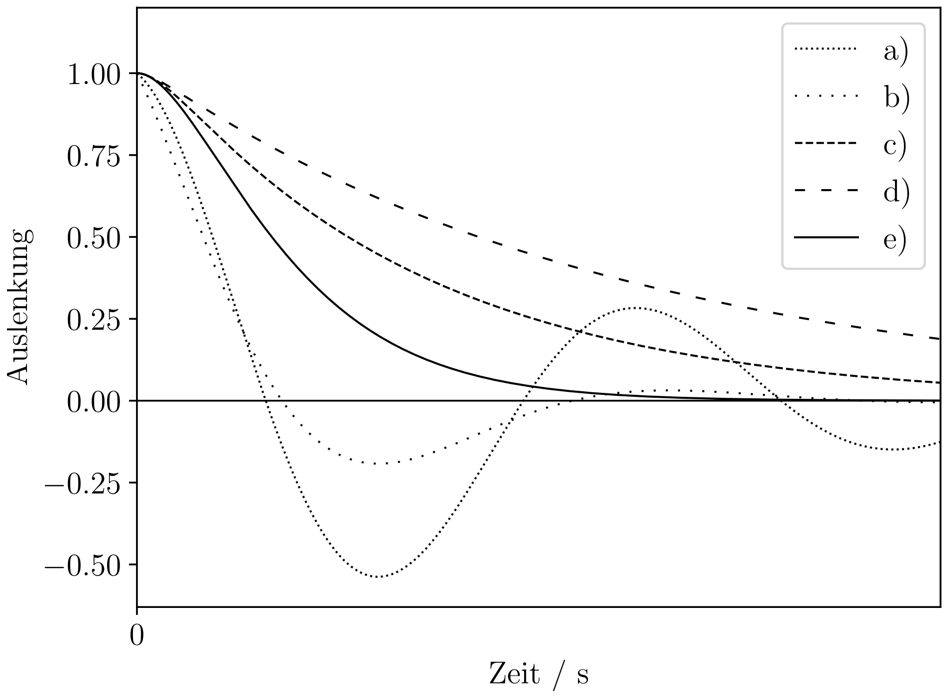


Abbildung 2: *Verhalten des gleichen harmonischen Oszillators der Eigenfrequenz $\omega_0 = 1\,\mathrm{s}^{-1}$ für unterschiedliche Dämpfungen.*

Abbildung 2 zeigt einen Vergleich aller drei Fälle. Ordnen Sie den dargestellten Graphen den jeweils entsprechenden Fall zu:

gepunktet : ____________________

durchgezogen : ____________________

gestrichelt : ____________________

Sortieren Sie die in Abbildung 2 dargestellten Graphen nach der Dämpfung des Oszillators:

_____ < _____ < _____ < _____ < _____

Welche Dämpfung liegt hier beim Aperiodischen Grenzfall vor? $\delta =$ _____ s^{-1}

3 Versuchsaufbau und -beschreibung

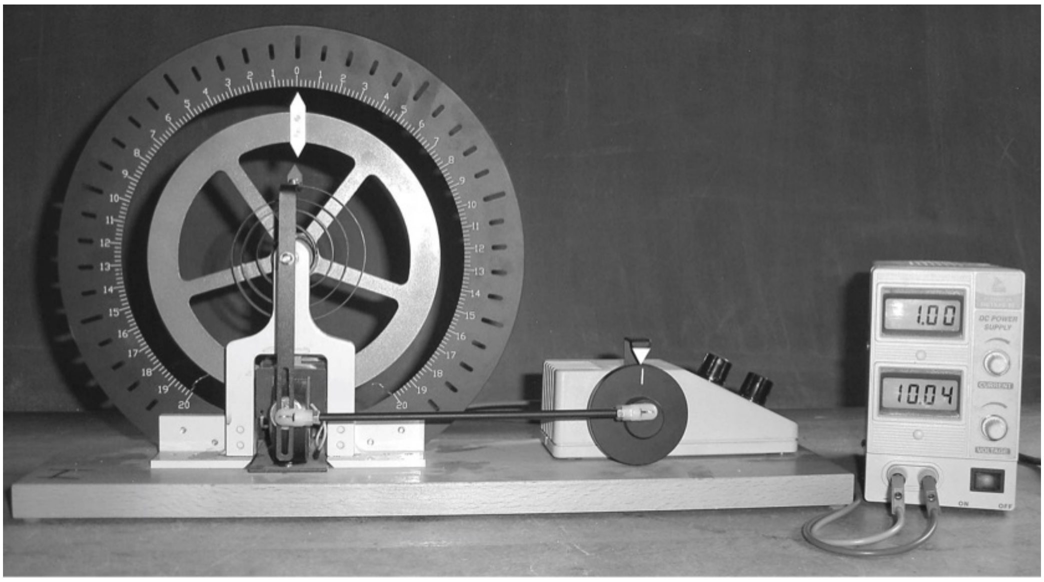


Abbildung 3: *Foto des Versuchsaufbaus*

Der Versuch besteht aus einem Drehpendel mit Wirbelstrombremse, einer regelbaren Stromquelle für die Dämpfungsspule und einer Stoppuhr. Zusätzlich ist im Aufbau auch ein Exzentermotor (mit zugehöriger Stromquelle) integriert. Dieser wird aber für diesen Versuch nicht benötigt.

Die Amplitude A wird an der Skala abgelesen, die Schwingungsdauer T_f wird mit der Stoppuhr (Mobiltelefon) gemessen.

4 Benötigte Formeln

4.1 Die freie ungedämpfte Schwingung

Für einen völlig reibungsfreien Versuchsaufbau würde sich die Schwingungsdauer des Drehpendels T_0 aus der Eigenfrequenz ω_0 (Kreisfrequenz!) des Pendels ergeben. Dabei gilt:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \; . \tag{24}$$

4.2 Die freie gedämpfte Schwingung

In der Realität hat man es aufgrund von Reibungsverlusten nie mit einem völlig ungedämpften System zu tun (auch nicht, wenn die Dämpfungsspule noch ausgeschaltet ist). Die resultierende Schwingungsdauer T_f des gedämpften Pendels ergibt sich aus der zugehörigen Kreisfrequenz ω_f, welche mit der Kreisfrequenz des ungedämpften Pendels und der Dämpfung δ wie folgt zusammenhängt:

$$\omega_f^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \; , \tag{25}$$

$$T_f = \frac{2\pi}{\omega_f} \; . \tag{26}$$

Die Dämpfung kann man aus der Schwingungsdauer des gedämpften Pendels und der Anzahl n_e der Schwingungen nach denen die Amplitude sich um den Faktor e^{-1} verringert hat berechnen:

$$\delta = \frac{1}{n_e T_f} \; . \tag{27}$$

Im sogenannten aperiodischen Grenzfall gilt:

$$\omega_0 = \delta \; . \tag{28}$$

5 Sicherheitshinweise

Dieser Versuchsaufbau enthält zwei Netzteile, es gelten also die üblichen Verhaltensregeln für den Umgang mit Strom.

Informieren Sie bei Defekten an Bestandteilen des Aufbaus Ihren Betreuer und versuchen Sie nicht selbst Teile zu demontieren.

6 Durchführung (im Praktikum)

Bitte führen Sie die nachfolgenden Punkte nacheinander durch:

1. **Eingewöhnung**
   Spielen Sie mit der Versuchsanordnung, wobei Sie sich mit der Beobachtungstechnik vertraut machen und Fehlerquellen erkennen sollten. Überprüfen Sie zunächst die Nullstellung der Winkelskala. Die Nullstellung kann durch *vorsichtiges* Drehen des Exzentermotors erreicht werden.

2. **Messung**
   Die folgenden Messungen müssen für sechs verschiedene Dämpfungsstromstärken j durchgeführt werden. Beginnen Sie mit $j = 0$ A und wählen Sie dann fünf weitere Stomstärken mit $0,3 \text{ A} \leq j \leq 0,75 \text{ A}$.

   a) **Bestimmen Sie die Schwingungsdauer T_f**
   Regen Sie zunächst eine Schwingung mit möglichst großer Anfangsamplitude an: $\tilde{A} > 18$ Skalenteile (Skt). Messen Sie dann mit der Stoppuhr die Zeit T_n für n vollständige Schwingungen bis die Amplitude auf ca. 0,4 Skt abgeklungen ist oder für maximal $n = 20$.

Stromstärke j / A	Zeit T_n / s	Anzahl Schwingungen n
0		

- Fehler der Zeitmessung: $\Delta T_n =$ ________________

- Ablesefehler der Stromstärke: $\Delta j =$ ________________

b) **Bestimmung Sie die Dämpfung δ**
Regen Sie zunächst wieder eine Schwingung mit möglichst großer Anfangsamplitude an. Messen Sie den Maximalausschlag nach jeder *vollen* Periode und zwar bis die Schwingung auf ca. $0,4 - 0,6$ Skt abgeklungen ist bzw. - bei geringen Dämpfungen - maximal für 25 Schwingungen. Ein Partner führt die Messung durch und diktiert die abgelesenen Werte, der andere protokolliert diese. Schätzen Sie den Ablesefehler.

- Ablesefehler Amplitude: $\Delta\tilde{A} =$ ________________

AT: ______________________ ______________________________________
(Datum) (Unterschrift Versuchsassistenz)

	Stromstärke j / A					
	0					
Schwingung #	Amplitude $\tilde{A}$ / Skt					
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
23						
24						
25						

7 Auswertung und Diskussion (zu Hause)

7.1 Bestimmung der Kreisfrequenzen ω_f

Bestimmen Sie für alle sechs Stromstärken die Frequenzen ω_f. Berechnen Sie dazu zunächst aus den gemessenen Zeiten für n Schwingungen die Schwingungsdauer T_f. Wie berechnen sich T_f und ω_f aus den gemessenen Werten? Wie berechnen sich die Fehler?

$T_f =$ ______________ $\Delta T_f =$ ______________

$\omega_f =$ ______________ $\Delta\omega_f =$ ______________

j / A	T_f / s	ΔT_f / s	ω_f / s^{-1}	$\Delta\omega_f$ / s^{-1}
0				

7.2 Bestimmung der Dämpfungskonstanten δ

Um die Dämpfungskonstanten δ zu ermitteln, betrachten wir zunächst einmal den Zusammenhang zwischen der Amplitude im Schwingfall und der Dämpfung in Abhängigkeit der Zeit:

$$\tilde{A}(t) = Ae^{-\delta t}. \tag{29}$$

Durch Logarithmieren der Gleichung folgt also

$$\begin{aligned} \ln(\tilde{A}(t)) &= \ln(Ae^{-\delta t}) \\ &= \ln(A) + \ln(e^{-\delta t}) \\ &= \ln(A) - \delta t. \end{aligned}$$

Nun wird hier allerdings nicht die Zeit, sondern die Anzahl der Schwingungen gemessen. Daher ersetzen wir die Zeit mithilfe des Zusammenhangs $t = n \cdot T_f$ und die Dämpfung δ durch Gleichung (27). Damit folgt:

$$\ln(\tilde{A}) = \ln(A) - \frac{1}{n_e} \cdot n. \tag{30}$$

Bei einer Auftragung von $\ln(\tilde{A})$ gegen n erhält man daher eine Gerade mit der Steigung:

$$m = \underline{\hspace{3cm}}. \tag{31}$$

Ermitteln Sie nun für alle sechs Stromstärken die Dämpfungskonstanten δ. Berechnen Sie dazu zunächst $\ln(\tilde{A})$ und den zugehörigen Fehler $\Delta\ln(\tilde{A})$ und tragen Sie die Werte in die folgenden Tabellen ein. Tragen Sie dann in sechs Diagrammen $\ln(\tilde{A})$ gegen n auf und ermitteln sie die Steigungen m der Geraden durch graphische Geradenanpassung. Ergänzen Sie die Beschriftungen der Diagramme um die Angabe der Stromstärke. Berechnen Sie danach die Dämpfungskonstanten gemäß Gleichung (27). Tragen Sie alle so erhaltenen Werte in Tabelle 1 ein. Ergänzen Sie die benötigten Formeln:

- $\Delta\ln(\tilde{A}) = \frac{\Delta\tilde{A}}{\tilde{A}}$
- $n_e = -\frac{1}{m}$
- $\Delta n_e = \underline{\hspace{5cm}}$
- $\delta = \underline{\hspace{5cm}}$
- $\Delta\delta = \underline{\hspace{5cm}}$

	Stromstärke j / A					
	0					
Schwingung #	$\ln(\tilde{A}/\text{Skt.})$	$\Delta\ln(\tilde{A}/\text{Skt.})$	$\ln(\tilde{A}/\text{Skt.})$	$\Delta\ln(\tilde{A}/\text{Skt.})$	$\ln(\tilde{A}/\text{Skt.})$	$\Delta\ln(\tilde{A}/\text{Skt.})$
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
23						
24						
25						

	Stromstärke j / A					
Schwingung #	$\ln(\tilde{A}/\text{Skt.})$	$\Delta\ln(\tilde{A}/\text{Skt.})$	$\ln(\tilde{A}/\text{Skt.})$	$\Delta\ln(\tilde{A}/\text{Skt.})$	$\ln(\tilde{A}/\text{Skt.})$	$\Delta\ln(\tilde{A}/\text{Skt.})$
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
23						
24						
25						

Abbildung 4: *Abnahme der Amplitude in Abhängigkeit der Schwingungen für einen Spulenstrom von 0 A*

Abbildung 5: *Abnahme der Amplitude in Abhängigkeit der Schwingungen für einen Spulenstrom von*

Abbildung 6: *Abnahme der Amplitude in Abhängigkeit der Schwingungen für einen Spulenstrom von*

Abbildung 7: *Abnahme der Amplitude in Abhängigkeit der Schwingungen für einen Spulenstrom von*

Abbildung 8: *Abnahme der Amplitude in Abhängigkeit der Schwingungen für einen Spulenstrom von*

Abbildung 9: *Abnahme der Amplitude in Abhängigkeit der Schwingungen für einen Spulenstrom von*

Tabelle 1: *Ergebnisse der graphischen Geradenanpassungen von* $\ln(\tilde{A}/\mathrm{Skt.})$ *gegen* n

j / A	m_{min}	m_{max}	m	Δm	n_e	Δn_e	δ	$\Delta\delta$
0								

7.3 Überprüfung des Zusammenhangs $\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

Überprüfen Sie in einem Diagramm den Zusammenhang $\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Tragen Sie dazu ω_f^2 gegen δ^2 auf. Führen Sie eine graphische Geradenanpassung durch. Die Steigung der Geraden dient dazu, den genannten Zusammenhang zu überprüfen, aus dem Achsenabschnitt bestimmen Sie die Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems.

Tabelle 2: *Wertetabelle für die Auftragung von* ω_f^2 *gegen* δ^2

j / A	ω_f^2 / s^{-2}	$\Delta\omega_f^2$ / s^{-2}	δ^2 / s^{-2}	$\Delta\delta^2$ / s^{-2}
0				

Abbildung 10: *Überprüfung des Zusammenhangs* $\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

Es gilt:

$$\omega_f^2 = \omega_0^2 - \delta^2, \tag{32}$$

daher wird in der Auftragung von ω_f^2 gegen δ^2 eine Steigung von $m =$ ____________ erwartet. Aus dem y-Achsenabschnitt b der Ausgleichsgerade kann die Eigenfrequenz ω_0 ermittelt werden. Tragen Sie die Werte Ihrer graphischen Geradenanpassung in die folgende Tabelle ein.

Tabelle 3: *Ergebnisse der graphischen Geradenanpassung von ω_f^2 gegen δ^2*

m_{min}	
m_{max}	
m	
Δm	

b_{min} / s^{-2}	
b_{max} / s^{-2}	
b / s^{-2}	
Δb / s^{-2}	

Für den y-Achsenabschnitt gilt nach Gleichung (32), dass $b = \omega_0^2$. Berechnen Sie daraus die Eigenfrequenz ω_0. Geben Sie zunächst die Formeln an:

$$\omega_0 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$\Delta\omega_0 = \underline{\hspace{4cm}}$$

Mit den in Tabelle 3 genannten Werten folgt damit für die Eigenfrequenz des Systems:

$$\omega_0 = \left(\qquad\qquad \pm \qquad\qquad \right) \mathrm{s}^{-1} \tag{33}$$

7.4 Dämpfungskonstante in Abhängigkeit des Spulenstroms

Stellen Sie in dem folgenden Diagramm den Zusammenhang zwischen der Dämpfungskonstanten δ und dem Spulenstrom j dar. Übertragen Sie die Dämpfungen aus Tabelle 1 in die folgende Wertetabelle und berechnen Sie j^2, sowie den zugehörigen Fehler als:

$$\Delta j^2 = \underline{\hspace{5cm}}.$$

Tragen Sie anschließend δ gegen j^2 auf. Führen Sie auch hier eine graphische Geradenanpassung durch und tragen Sie die Ergebnisse in Tabelle 5 ein.

Tabelle 4: *Wertetabelle für die graphische Geradenanpassung von δ gegen j^2*

j / A	j^2 / A^2	Δj^2 / A^2	δ / s^{-1}	$\Delta\delta$ / s^{-1}
0				

Abbildung 11: *Dämpfungskonstante in Abhängigkeit des Spulenstroms.*

__Tabelle 5:__ Ergebnisse der graphischen Geradenanpassung von δ gegen j^2

m_{min} / $\mathrm{s^{-1}A^{-2}}$	
m_{max} / $\mathrm{s^{-1}A^{-2}}$	
m / $\mathrm{s^{-1}A^{-2}}$	
Δm / $\mathrm{s^{-1}A^{-2}}$	

b_{min} / $\mathrm{s^{-1}}$	
b_{max} / $\mathrm{s^{-1}}$	
b / $\mathrm{s^{-1}}$	
Δb / $\mathrm{s^{-1}}$	

Die resultierende Geradengleichung lautet:

$$\delta(j^2) = \left(\qquad \pm \qquad \right) \mathrm{s^{-1}A^{-2}} \cdot j^2 + \left(\qquad \pm \qquad \right) \mathrm{s^{-1}}$$

Für den aperiodischen Grenzfall muss nach Abschnitt 7.3 eine Dämpfung von

$$\delta = \left(\qquad \pm \qquad \right) \mathrm{s^{-1}}$$

gewählt werden. Die entsprechende Stromstärke ergibt sich aus der Umkehrfunktion von $\delta(j^2)$. Lösen Sie dazu zunächst die Gleichung $\delta = m \cdot j^2 + b$ nach j auf:

$$j(\delta) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}. \tag{34}$$

Um den zugehörigen Fehler zu berechnen, geben Sie zu nächst alle Ableitungen nach fehlerbehafteten Größen an. *Tipp*: Wenn Sie längliche Terme mithilfe von Gleichung (34) durch j ersetzen, wird die Rechnung übersichtlicher.

$$\frac{\partial j}{\partial \delta} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\frac{\partial j}{\partial b} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\frac{\partial j}{\partial m} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Setzen Sie nun aus diesen Ableitungen den Fehler Δj nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung zusammen:

$$\Delta j = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}. \tag{35}$$

Aus den Gleichungen (34) und (35) folgt nun für den aperiodischen Grenzfall eine Stromstärke von:

$$j = \left(\qquad \pm \qquad \right) \mathrm{A} \tag{36}$$

7.5 Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse

Entsprechen die Verläufe der Diagramme Ihren Erwartungen? Konnten Sie den Zusammenhang $\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ bestätigen? Liegt der Dämpfungsstrom, bei dem der aperiodische Grenzfall eintreten soll in einem realistischen Bereich? Welche Fehlerquellen gibt es in diesem Versuch?

gesehen: ____________________ ______________________________

(Datum) (Unterschrift Versuchsassistenz)

8 Literatur

- Fehlerrechnung:
  https://teaching.astro.uni-koeln.de/sites/default/files/praktikum_a/Anleitung_zur_Fehlerrechnung.pdf
- Budo, A.: Theoretische Mechanik
- Demtröder: Experimentalphysik 1, Springer, 2001
  http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html
- Meschede und Gerthsen: Physik, Springer, Berlin, 21. Aufl., 2002
  http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html
- Walcher, Elbel und Fischer: Praktikum der Physik, Vieweg+Teubner
- Westphal: Physikalisches Praktikum, Vieweg+Teubner