Versuch M3a für Physiker
Gedämpfter harmonischer Oszillator

I. Physikalisches Institut, Raum HS102
Stand: 12. Oktober 2012

generelle Bemerkungen

- **bitte Versuchsaufbau (Nummer) angeben**
- **bitte Versuchspartner angeben**
- **bitte Versuchsbetreuer angeben**
- **bitte nur handschriftliche Auswertung**

1 Einleitung

Der harmonische Oszillator ist ein Phänomen, dass in der Physik an vielen Stellen behandelt wird und auch in der Technik von großer Bedeutung ist. Die zugehörige Theorie kann auf viele Problemstellungen angewandt werden und ist oftmals die einzige analytisch lösbare Näherung. Daher ist es von großer Bedeutung, sowohl die mathematischen Lösungsstrategien seiner verschiedenen Spezialfälle zu kennen als auch mit dem Verhalten schwingender Systeme unter verschiedensten Bedingungen vertraut zu sein.

2 Vorbereitung (zu Hause)

Die folgenden Stichpunkte und theoretischen Überlegungen sollen in Ihrem Heft schriftlich bearbeitet werden. Außerdem sollten Sie in der Lage sein, sie am Versuchstag im Antestat selbstständig wiederzugeben. Weitere Hinweise zum Vorgehen bei den Herleitungen finden Sie in Abschnitt 7. Literaturhinweise gibt es in Abschnitt 8.

1. Machen Sie sich mit folgenden Begriffen und Gesetzmäßigkeiten vertraut:
   - Allgemeine Begriffe: Trägheitsmoment, Amplitude, Schwingungsdauer, Eigenfrequenz, Fehlerfortpflanzung
   - Wirbelstrombremse, Lorentzkraft, Lenz'sche Regel
   - Harmonischer Oszillator, Hook'sches Gesetz, freie ungedämpfte Schwingung, freie gedämpfte Schwingung, Schwingfall, Kriechfall, aperiodischer Grenzfall
2. Freie ungedämpfte Schwingung:
   - Stellen Sie die Bewegungsgleichung (6) auf und geben Sie ihre physikalische Interpretation an.
   - Lösen Sie die Bewegungsgleichung durch komplexen Ansatz.
3. Freie gedämpfte Schwingung:
   - Stellen Sie die Bewegungsgleichung (12) auf und geben Sie ihre physikalische Interpretation an.
   - Lösen Sie die Bewegungsgleichung durch Exponential-Ansatz. (Fallunterscheidung für ω^2/δ^2!)
   - Zeichnen Sie für alle drei Fälle die Graphen für $\varphi(t)$ und verdeutlichen Sie an Ihrer Zeichnung die Unterschiede zwischen den verschieden Fällen.
   - Nach welcher Zeit t ist die Schwingungsamplitude $Ae^{-\delta t}$ auf den Bruchteil e^{-1} der Anfangsamplitude zurückgegangen? Wann auf e^{-4}? Wann auf $1/2$?
   - Leiten Sie für die Dämpfung die Beziehung (4) her.

3 Versuchsaufbau und -beschreibung

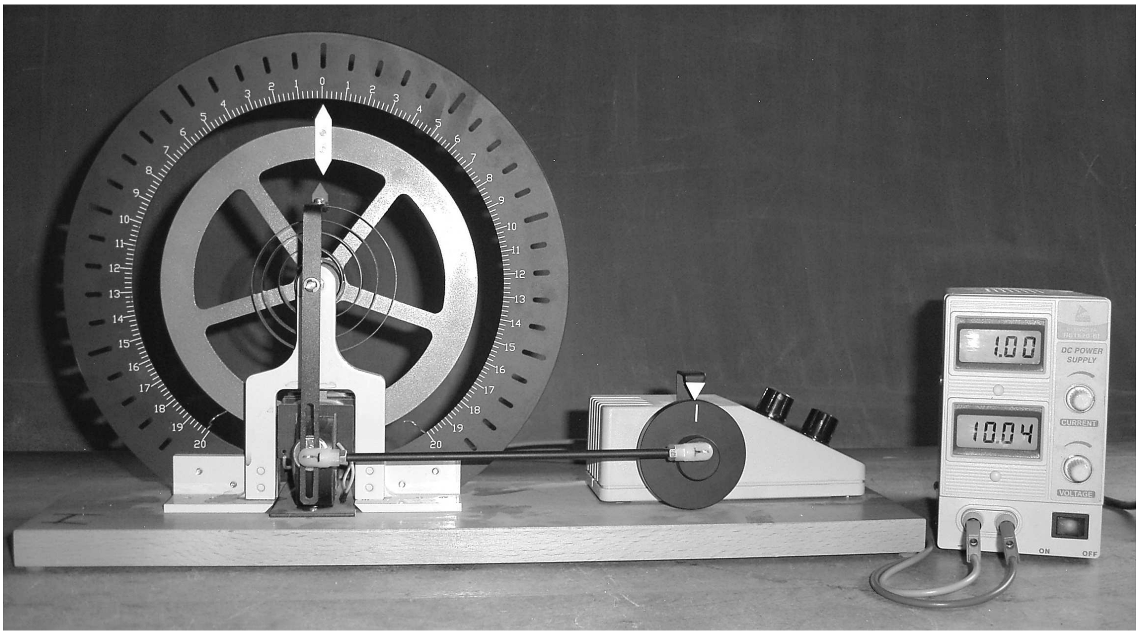

Abbildung 1: Foto des Versuchsaufbaus

Der Versuch besteht aus einem Drehpendel mit Wirbelstrombremse, einer regelbaren Stromquelle für die Dämpfungsspule und einer Stoppuhr. Zusätzlich ist im Aufbau auch ein Exzentermotor (mit zugehöriger Stromquelle) integriert. Dieser wird aber nur für den Versuch M3b benötigt.
Die Amplitude A wird an der Skala abgelesen, die Schwingungsdauer T_f wird mit der Stoppuhr gemessen.

4 Benötigte Formeln

4.1 Die freie ungedämpfte Schwingung

Für einen völlig reibungsfreien Versuchsaufbau würde sich die Schwingungsdauer des Drehpendels T_0 aus der Eigenfrequenz ω_0 (Kreisfrequenz!) des Pendels ergeben. Dabei gilt:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \; . \tag{1}$$

4.2 Die freie gedämpfte Schwingung

In der Realität hat man es aber nie mit einem völlig ungedämpften System zu tun (auch nicht, wenn die Dämpfungsspule noch ausgeschaltet ist). Die resultierende Schwingungsdauer T_f des gedämpften Pendels ergibt sich aus der zugehörigen Kreisfrequenz ω_f, welche mit der Kreisfrequenz des ungedämpften Pendels und der Dämpfung δ wie folgt zusammenhängt:

$$\omega_f^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \; , \tag{2}$$

$$T_f = \frac{2\pi}{\omega_f} \; . \tag{3}$$

Die Dämpfung kann man aus der Schwingungsdauer des gedämpften Pendels und der Anzahl n_e der Schwingungen nach denen die Amplitude sich um den Faktor e^{-1} verringert hat berechnen:

$$\delta = \frac{1}{n_e T_f} \; . \tag{4}$$

Im sogenannten aperiodischen Grenzfall gilt:

$$\omega_0 = \delta \; . \tag{5}$$

Hinweise zur Herleitung finden sich in Abschnitt 7 dieser Anleitung.

5 Durchführung (im Praktikum)

Bitte führen Sie die nachfolgenden Punkte nacheinander durch:

1. **Eingewöhnung**
   Spielen Sie mit der Versuchsanordnung, wobei Sie sich mit der Beobachtungstechnik vertraut machen und Fehlerquellen erkennen sollten. Zeichnen Sie eine Versuchsskizze inklusive des Schaltbildes in Ihr Protokollheft. Überprüfen Sie zunächst die Nullstellung der Winkelskala. Die Nullstellung kann durch *vorsichtiges* Drehen des Exzentermotors erreicht werden.

2. **Messung**
   Die folgenden Messungen müssen für sechs verschiedene Dämpfungsstromstärken j durchgeführt werden. Beginnen Sie mit $j = 0$ A und wählen Sie dann fünf weitere Stomstärken mit $0,3\ \text{A} \leq j \leq 0,75\ \text{A}$.

   (a) **Bestimmen Sie die Schwingungsdauer T_f**
   Regen Sie zunächst eine Schwingung mit möglichst großer Anfangsamplitude an: $A > 18$ Skalenteile (Skt). Messen Sie dann mit der Stoppuhr die Zeit für maximal 20 Schwingungen oder bis die Amplitude auf ca. 0.4 Skt abgeklungen ist.

   (b) **Bestimmung Sie die Dämpfung δ**
   Regen Sie zunächst wieder eine Schwingung mit möglichst großer Anfangsamplitude an. Messen Sie den Maximalausschlag nach jeder *vollen* Periode und zwar bis die Schwingung auf ca. $0.4 - 0.6$ Skt abgeklungen ist bzw. - bei geringen Dämpfungen - maximal für 25 Perioden. Ein Partner führt die Messung durch und diktiert die abgelesenen Werte, der andere protokolliert diese. Schätzen Sie den Ablesefehler.

6 Auswertung und Diskussion (im Praktikum / zu Hause)

Bitte führen Sie zu jedem Wert eine Fehlerrechnung durch. Geben Sie alle verwendeten Formeln an und erläutern Sie kurz, was Sie tun und warum. Zeichnen Sie Ihre Diagramme auf Millimeterpapier und beschriften Sie sie vollständig (zu welcher Aufgabe gehört das Diagramm?, was ist auf den Achsen aufgetragen?). Die korrekte Form zur Angabe von Ergebnissen, sowie Hinweise zur Fehlerrechnung entnehmen Sie bitte der *Allgemeinen Praktikumsanleitung*.

1. **Bestimmen Sie für alle sechs Stromstärken die Frequenzen ω_f.**
   Berechnen Sie dazu zunächst aus den gemessenen Zeiten für n Schwingungen die Schwingungsdauer T_f.

2. **Ermitteln Sie für alle sechs Stromstärken die Dämpfungskonstanten δ.**
   Tragen Sie dazu in sechs Diagrammen $\ln A$ gegen n auf und ermitteln Sie daraus jeweils den Wert für n_e, indem Sie durch graphische Geradenanpassung die Steigungen der Geraden bestimmen. Aus dem negativen Kehrwert der Steigung erhalten Sie dann n_e. Bitte erläutern Sie, warum das so ist - d.h., wie die Abnahme der Amplitude mit der Zeit mit der logarithmischen Auftragung der Amplitude gegen die Schwingungsanzahl zusammenhängt. Berechnen Sie danach die Dämpfungskonstanten gemäß Gleichung (4).

3. **Überprüfen Sie in einem Diagramm den Zusammenhang $\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.**
   Tragen Sie dazu ω_f^2 gegen δ^2 auf. Führen Sie eine graphische Geradenanpassung durch. Die Steigung der Geraden dient dazu, den gennanten Zusammenhang zu überprüfen, aus dem Achsenabschnitt bestimmen Sie die Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems.

4. **Stellen Sie in einem Diagramm den Zusammenhang zwischen der Dämpfungskonstanten δ und dem Spulenstrom j dar.**
   Tragen Sie dazu δ gegen j^2 auf. Führen Sie auch hier eine graphische Geradenanpassung durch.

5. **Welcher Spulenstrom muss eingestellt werden, damit der aperiodische Grenzfall eintritt?**
   Ermitteln Sie diesen Wert mithilfe der Geradengleichungen zu den Diagrammen $\omega_f^2\left(\delta^2\right)$ und $\delta\left(j^2\right)$.

6. **Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.**
   Entsprechen die Verläufe der Diagramme Ihren Erwartungen? Konnten Sie den Zusammenhang $\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ bestätigen? Liegt der Dämpfungsstrom, bei dem der aperiodische Grenzfall eintreten soll in einem realistischen Bereich? Welche Fehlerquellen gibt es in diesem Versuch?

7 Anhang: Hinweise zur Herleitung der Formeln

7.1 Die freie ungedämpfte Schwingung

Die Bewegungsgleichung einer freien ungedämpften harmonischen Schwingung lautet:

$$I\ddot{\varphi}(t) = -D\varphi(t) \ , \tag{6}$$

t	=	Zeit
φ	=	Winkelausschlag des Drehpendels
I	=	Trägheitsmoment
D	=	Richtkonstante der rücktreibenden Spiralfeder

Hierbei handelt es sich um eine homogene lineare Differentialgleichung (DGL) 2. Grades. Die allgemeine Lösung dieser DGL erhält man durch Linearkombination zweier linear unabhängiger Funktionen des fundamentalen Lösungssystems. Dabei muss die Lösung der Bewegungsgleichung $\varphi(t)$ so beschaffen sein, dass sie bis auf konstante Faktoren mit ihrer zweiten Ableitung $\ddot{\varphi}(t)$ übereinstimmt. Diese Bedingung wird sowohl von Kreisfunktionen als auch von der Exponentialfunktion erfüllt und motiviert den komplexen Ansatz:

$$\phi(t) = ae^{i\omega_0 t} \ . \tag{7}$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung (6) liefert:

$$-I\omega_0^2\phi(t) + D\phi(t) = 0 \ ,$$

wobei offensichtlich gilt:

$$\omega_0 = \pm\sqrt{\frac{D}{I}} \ . \tag{8}$$

Besitzt ω_0 einen dieser Werte, so stellt die durch (7) gegebene Funktion, bei beliebiger Wahl der Konstanten a, eine spezielle Lösung der Bewegungsgleichung dar. Die allgemeine Lösung erhält man durch Linearkombination der beiden Lösungen zu ω_0:

$$\phi(t) \ = \ ae^{i\omega_0 t} + be^{-i\omega_0 t} \ . \tag{9}$$

mit $a, b \in \mathbb{C}$. Dabei ist zu bedenken, dass physikalisch natürlich nur rein reelle Lösungen Sinn machen. Sobald man Anfangsbedingungen für das schwingende System vorgibt resultieren häufig schon Konstanten a und b, die $\phi(t)$ rein reell werden lassen, falls nicht wählt man nur den Realteil der erheltenen Lösung. Die allgemeine (d.h. für beliebige Anfangsbedingungen) physikalische Lösung der Bewegungsgleichung erhält man unter Verwendung der Euler-Beziehung $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ als:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \mathrm{Re}\left[\phi(t)\right] \\ &= \mathrm{Re}\left[(a+b)\cos(\omega_0 t) + (a-b)i\sin(\omega_0 t)\right] \\ &= A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \ . \end{aligned} \tag{10}$$

Wie man sieht, handelt es sich bei (10) um eine periodische Bewegung mit der *Kreisfrequenz* ω_0.

Wählt man nun die speziellen Anfangsbedingungen $\varphi(0) = A$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$, so erhält man die Lösung:

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= A\cos(\omega_0 t)\ , \qquad (11)\\
A &= \text{Anfangsamplitude}\ ,\\
T_0 &= \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{(Schwingungsdauer)}\ .
\end{aligned}
$$

Die Größe ω_0 wird auch als *Eigenfrequenz* des ungedämpften harmonischen Oszillators bezeichnet.

7.2 Die freie gedämpfte Schwingung

Im Fall der freien gedämpften Schwingung lautet die Bewegungsgleichung:

$$I\ddot{\varphi}(t) = -D\varphi(t) - k\dot{\varphi}(t)\ . \qquad (12)$$

Hierbei ist k die Reibungskonstante und im vorliegenden Fall hauptsächlich abhängig vom Spulenstrom j. Die Reibung wird durch Wirbelströme erzeugt, wenn sich der Kupferring im Magnetfeld der Gleichstromspule bewegt. Weitere Effekte wie Luftreibung etc. tragen nur geringfügig zur Gesamtreibung bei.

Die Bewegungsgleichung ist wieder eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Grades für $\varphi(t)$. Um sie zu lösen wählt man den sogenannten Exponentialansatz:

$$\phi(t) = a \cdot e^{\lambda t}\ , \qquad (13)$$

mit $A \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$. Einsetzen in die Bewegungsgleichung (12) führt zu:

$$
\begin{aligned}
0 &= I\ddot{\phi} + k\dot{\phi} + D\phi \qquad (14)\\
\Rightarrow \lambda &= -\delta \pm i\omega_f\ , \qquad (15)
\end{aligned}
$$

wobei gilt:

$$
\begin{aligned}
\delta &= \frac{k}{2I} \quad \text{(Dämpfung)}\ ,\\
\omega_0 &= \sqrt{\frac{D}{I}}\ ,\\
\omega_f &= \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\ , \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Offenbar sind die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:

- $\omega_0^2 - \delta^2 > 0$ **Schwingfall**
- $\omega_0^2 - \delta^2 = 0$ **Aperiodischer Grenzfall**
- $\omega_0^2 - \delta^2 < 0$ **Kriechfall**

Sie führen zu qualitativ unterschiedlichen Lösungen für $\phi(t)$, auf die wir im Folgenden kurz eingehen wollen. Wie schon für den ungedämpften harmonischen Oszillator erhält man für jeden Fall zwei Lösungen für λ. Um die Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichug zu finden muss man für jeden Fall die beiden Lösungen $\pm\omega_f$ linearkombinieren.

7.2.1 Schwingfall

Hier gilt $\omega_0^2 - \delta^2 > 0$, also ist ω_f eine reelle Zahl. Als Lösung für die Bewegungsgleichung erhält man:

$$\varphi(t) = a \cdot e^{-\delta t} e^{i\omega_f t} + b \cdot e^{-\delta t} e^{-i\omega_f t} \ , \tag{17}$$

Für die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = A$ und $\dot{\varphi}(0) = -\delta A$ ergibt sich damit die Lösung (vgl. Abb. 2):

$$\varphi(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_f t) \ . \tag{18}$$

$T_f = \frac{2\pi}{\omega_f}$ ist die Schwingungsdauer der freien gedämpften Schwingung. Die cos-Funktion beschreibt die Oszillation, die e-Funktion das Abklingen und das schließliche Verlöschen der Amplitude. Man wundert sich hier vielleicht über die Wahl der Anfangsbedingungen. Intuitiver wäre sicherlich die Annahme, dass das Pendel ausgelenkt und losgelassen wird, also keine Anfangsgeschwindigkeit hat. Im Gegensatz zur ungedämften Schwingung würden solche Anfangsbedingungen hier aber nicht zu einer Kosinusförmigen Bewegung führen, sondern man erhielte auch einen geringen Sinusbeitrag. Um den Rechenaufwand geringer zu halten empfiehlt es sich bei der gedämpften Schwingung, den Zeitpunkt $t = 0$ so zu wählen, dass nur der Kosinusterm übrig bleibt. Das bedeutet, man wählt den Zeitpunkt als Anfang, an dem die Kurve der gedämpften Schwingung die einhüllende Exponentialfunktion berührt. Dies geschieht, wie man an Abbildung 2 sehen kann, nicht im Umkehrpunkt des Pendels, sondern ein bischen rechts davon. Es muss also eine Anfangsgeschwindigkeit angenommen werden.

Im Versuch soll hauptsächlich der Schwingfall untersucht werden.

Man kann zeigen, dass für die Dämpfung gilt:

$$\delta = \frac{1}{n_e T_f} \tag{19}$$

Bei der Größe n_e handelt es sich um die Anzahl der Schwingungen, nach denen die Amplitude von A auf A/e abgenommen hat.

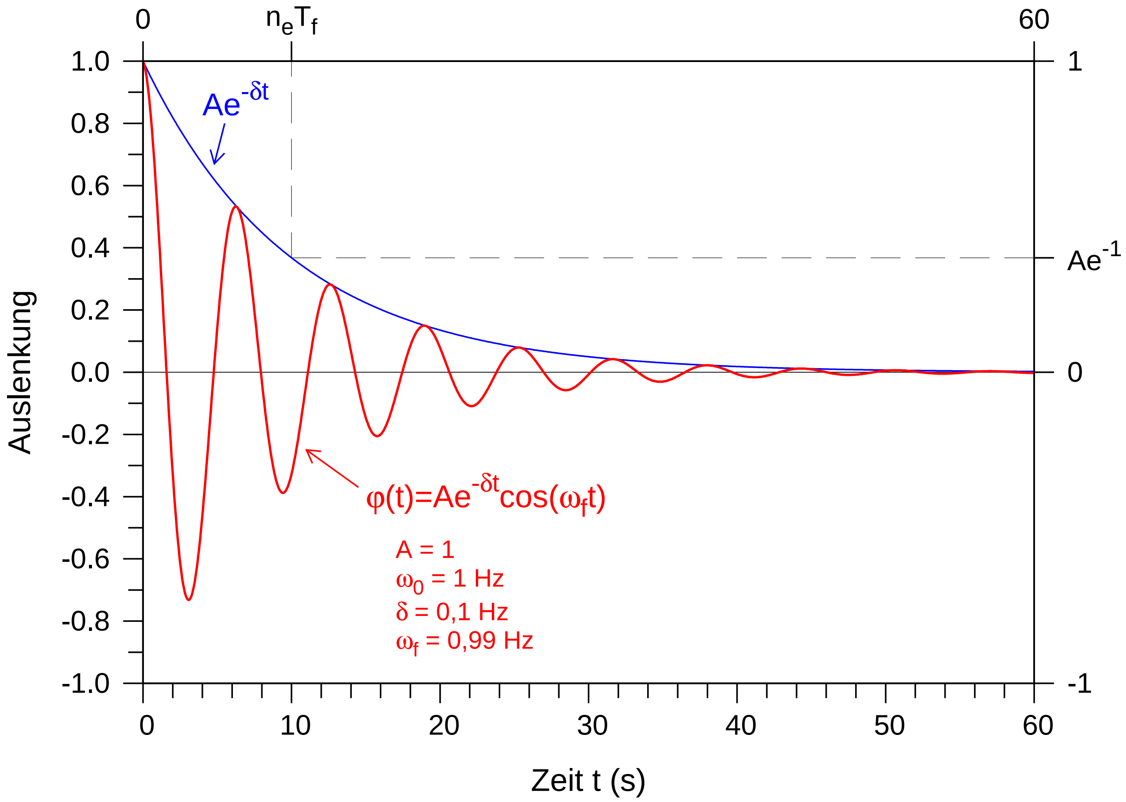

Abbildung 2: Abnahme der Amplitude mit der Zeit im Schwingfall

7.2.2 Aperiodischer Grenzfall

Hier gilt $\omega_f = 0$. Um zwei linear unabhängige Lösungen zu erhalten muss man daher die Methode *Variation der Konstanten* wählen, d.h.

$$\phi(t) = a(t) \cdot e^{-\delta t} \; . \tag{20}$$

Für $a(t)$ ergeben sich die Lösungen $a = const$ oder $a = const \cdot t$. Als Lösung für die Bewegungsgleichung erhält man damit:

$$\varphi(t) = (a + bt) \cdot e^{-\delta t} \; . \tag{21}$$

Für die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = A$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ ergibt sich damit die Lösung:

$$\varphi(t) = A\,(1 + \delta t) \cdot e^{-\delta t} \; . \tag{22}$$

7.2.3 Kriechfall

Hier gilt $\omega_0^2 - \delta^2 < 0$, also ist ω_f eine rein komplexe Zahl, $i \cdot \omega_f = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ dagegen ist reell. Als Lösung für die Bewegungsgleichung erhält man:

$$\varphi(t) = a \cdot e^{(-\delta + i\omega_f)t} + b \cdot e^{(-\delta - i\omega_f)t} \ . \tag{23}$$

Für die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = A$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ ergibt sich damit die Lösung:

$$\varphi(t) = Ae^{-\delta t} \left(\cosh\left(i\omega_f t\right) + \frac{\delta}{i\omega_f} \sinh\left(i\omega_f t\right) \right) \ . \tag{24}$$

Abbildung 3 zeigt einen Vergleich aller drei Fälle.

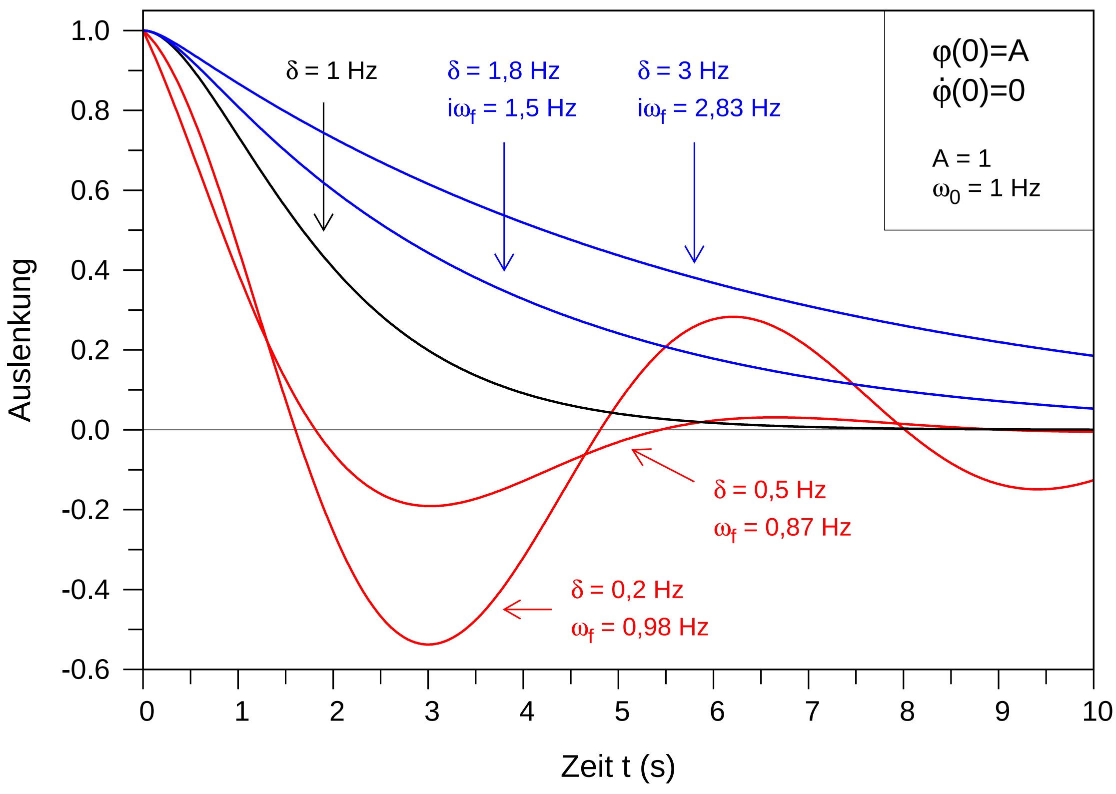

Abbildung 3: Verhalten des gleichen harmonischen Oszillators für unterschiedliche Dämpfungen: rot: Schwingfall, schwarz: Aperiodischer Grenzfall, blau: Kriechfall

8 Literatur

- Fehlerrechnung:
  `http://www.astro.uni-koeln.de/teaching_seminars/AP/`
  `http://www.ph2.uni-koeln.de/fileadmin/Lehre/Anfaengerpraktikum/Fehler.pdf`
- Budo, A.: Theoretische Mechanik
- Demtröder: Experimentalphysik 1, Springer, 2001
  `http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html`
- Meschede und Gerthsen: Physik, Springer, Berlin, 21. Aufl., 2002
  `http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html`
- Walcher, Elbel und Fischer: Praktikum der Physik, Vieweg+Teubner
- Westphal: Physikalisches Praktikum, Vieweg+Teubner

9 Sicherheitshinweise

Dieser Versuchsaufbau enthält zwei Netzteile, es gelten also die üblichen Verhaltensregeln für den Umgang mit Strom.
Informieren Sie bei Defekten an Bestandteilen des Aufbaus Ihren Betreuer und versuchen Sie nicht selbst Teile zu demontieren.