I. Physikalisches Institut
Universität zu Köln

M6 Trägheitsmoment und Drehschwingungen

Praktikum A für Nebenfächler

Version vom 26. Juni 2023

Abzugeben bis: ______________________

Assistent: ______________________

Gruppenmitglieder: ______________________

____

____

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Schwingungsprozesse spielen in der gesamten Physik eine wichtige Rolle. Ebenso sind Drehbewegungen von elementarer Bedeutung. Dieser Versuch erlaubt über die Kombination dieser beiden Bewegungsarten eine Aussage über das Trägheitsverhalten verschiedener Körper bzgl. Drehungen – das Trägheitsmoment wird als die charakterisierende physikalische Größe eingeführt. Einige elementare Eigenschaften wie der *Steinersche Satz* und das *Additionstheorem für die Trägheitsmomente flacher Körper* werden experimentell überprüft.

Wichtige Informationen

Zur Bearbeitung ist es zwingend erforderlich dass Sie sich mit den Grundlagen der Fehlerrechnung (Gaußsche Fehlerfortpflanzung, (Gewichteter) Fehler des Mittelwerts, Grafische Geradenanpassung) vertraut machen.
Der Umfang dieses Versuchs macht es nötig, dass sie der Ordnung halber die Blätter mittels Schnellhefter o.ä. binden. Bitte lochen Sie die Blätter und heften Sie sie sorgfältig ein. Sollte die Form der Abgabe nicht den Regularien entsprechen wird die Auswertung durch den Assistenten verweigert werden.
Versuchen Sie innerhalb der vorgegebenen Lücken zu bleiben, diese geben den Umfang vor, der an entsprechender Stelle erwartet wird. sollte der Platz dennoch nicht ausreichen fügen Sie ganze Blätter ein.
Beachten Sie bitte, dass die Lücken und Fragestellungen im Abschnitt 2 vollständig zu beantworten, sowie alle fehlenden Formeln in Abschnitt 5 zu ergänzen sind und am Versuchstag vorgezeigt werden müssen. Es wird davon ausgegangen, dass alle Gruppenmitglieder die vollständige Anleitung durchgelesen und verstanden haben. Sollten Sie am Versuchstag nicht ausreichend auf den Versuch vorbereitet sein, wird die Assistentin/der Assistent Sie nicht am Versuch teilnehmen lassen.

Alle auf dem Deckblatt aufgeführten Gruppenmitglieder sind für die Bearbeitung und fristgerechte Abgabe des Versuchsberichts bzw. dessen erforderlichen Korrekturen zuständig und verantwortlich. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass Sie sich mit den Regeln des A-Praktikums[a] vertraut gemacht haben.

[a] zu finden unter: `https://teaching.astro.uni-koeln.de/AP`

2 Vorbereitung (zu Hause)

Die folgenden Stichpunkte und theoretischen Überlegungen sind zentrale Bestandteile des Versuchs und sollten grundsätzlich gelernt und verstanden sein. Außerdem sollten Sie in der Lage sein, sie am Versuchstag im Antestat selbstständig wiederzugeben. Weitere Hinweise zum Vorgehen bei den Herleitungen finden Sie in Abschnitt 7. Literaturhinweise gibt es in Abschnitt 8.

Machen Sie sich allgemein mit folgenden Begriffen und Gesetzmäßigkeiten vertraut:

- Drehbewegung starrer Körper
- Drehmoment und Trägheitsmoment
- (Haupt-)Trägheitsachsen
- Steinerscher Satz
- Additionstheorem für das Trägheitsmoment einer flachen Scheibe
- Drehpendel
- Harmonische Drehschwingung (harmonischer Oszillator)

2.1 Drehbewegungen

Um Drehbewegungen eines starren Körpers zu beschreiben, werden die Begriffe *Winkel*, *Winkelgeschwindigkeit* und *Winkelbeschleunigung* bezüglich einer Drehachse verwendet, mit den gemeinhin verwendeten Symbolen φ, ω und α. **Hinweis:** Für diesen Versuch ist es auf Grund der Eindimensionalität ausreichend, mit den skalarwertigen Beträgen der verwendeten Größen zu rechnen. Im Allgemeinen sind φ, ω, α und M Vektoren, die zusätzlich zu ihrem Betrag auch die Ausrichtung der Drehachse im Raum und den Drehsinn der Bewegung beschreiben.

1. Welche Einheit hat φ üblicherweise in der Physik? ____________________

2. Welche Einheit hat dann entsprechend ω? ____________________

3. Welche Einheit hat α? ____________________

4. Die Umrechnung von Grad in Radiant erfolgt durch $1° \hat{=} \frac{2\pi}{360}$rad. Wieviel Radiant entsprechen dann einer viertel Drehung? Wieviel anderthalb Drehungen?

   ____

5. Bei einer Drehbewegung ändert sich φ zeitlich: $\varphi = \varphi(t)$. Genau wie bei einer Translationsbewegung kann daraus durch Ableiten nach der Zeit die Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung berechnet werden: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}(t)$ und $\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}(t)$.
   Anmerkung: Die Dimension des Radiant ist 1, daher wird das Einheitenzeichen 'rad' bei einer Winkelangabe oft weggelassen.
   Gegeben sei eine Drehbewegung durch $\varphi(t) = \pi\frac{t^2}{s^2} + 2\pi\frac{t}{s}$ mit der Zeitvariable t in Sekunden.

   Die Winkelgeschwindigkeit: $\omega =$ ____________________

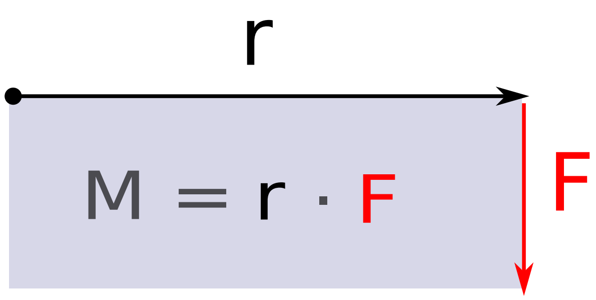
   Die Winkelbeschleunigung: $\alpha =$ ____________________

   Wie viele Umdrehungen sind nach zwei Sekunden erfolgt? ______________

2.2 Drehmoment und Trägheitsmoment

Oft kennt man die Drehbewegung $\varphi(t)$ zunächst nicht, sondern möchte sie aus den wirkenden Kräften und der Beschaffenheit des starren Körpers berechnen. Um das zu tun, benötigt man das von außen wirkende *Drehmoment* und das *Trägheitsmoment* des Körpers.

1. Das Drehmoment M ist verantwortlich dafür, dass ein Körper in eine Rotationsbewegung versetzt, oder aus dieser abgebremst wird und lässt sich berechnen durch $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Oft reicht es aus, mit den Beträgen der vektoriellen Größen zu rechnen. Für einen rechten Winkel zwischen Hebelarm und Kraft vereinfacht sich das Kreuzprodukt der Vektoren dann zu einer einfachen Multiplikation von Skalaren. Hier entspricht r der Länge eines Hebelarms, und F einer rechtwinklig zum Hebelarm wirkenden Kraft.



2. Was ist die Einheit des Drehmoments? $[M] =$ ____________________

3. Wie groß ist das resultierende Drehmoment M bei einer Hebelarmlänge von 12 cm, und einer Kraft von 0,6 N? $M =$ ____________________

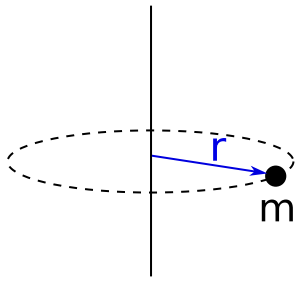
4. Beim Wechsel auf Winterreifen sollen die Radschrauben mit einem Drehmoment von 100 Nm angezogen werden. Welche Kraft muss dafür am Ende des 70 cm langen Schraubschlüssels aufgebracht werden? $F =$ ____________________

5. Das Trägheitsmoment I gibt an, wie groß der Widerstand ist, den ein Körper entgegensetzt, wenn man versucht ihn mittels eines Drehmoments in Rotation zu versetzen. Präziser ausgedrückt gilt: Drehmoment ist gleich Trägheitsmoment mal Winkelbeschleunigung, oder mathematisch $M = I\ddot{\varphi}$.
   Eine sehr ähnliche Gleichung sollte Ihnen von Translationsbewegungen bereits bekannt sein: das 2. Newtonsche Gesetz $F = ma$. In Analogie entspricht damit das Drehmoment bei einer Rotationsbewegung dem/der ____________ bei Translationsbewegungen.

   Ebenso lässt sich das Tragheitsmoment mit dem/der ____________ identifizieren.

6. Um das Trägheitsmoment I eines starren Körpers zu berechnen, muss man seine Massenverteilung sowie die Lage der betrachteten Rotationsachse kennen. Für einen Körper, der modellhaft aus diskreten Massenpunkten zusammengesetzt ist gilt: $I = \sum m_i r_i^2$. Jeder Massenpunkt m_i wird mit dem Quadrat seines Abstandes r_i zur betrachteten Rotationsachse gewichtet, und dann aufsummiert.

Betrachten wir nun zur Veranschaulichung das einfachste vorstellbare rotierende System: Ein Massenpunkt der Masse m befindet sich im Abstand r von einer Rotationsachse:



Das Trägheitsmoment I berechnet sich für i diskrete Massenpunkte nach $I = \sum_i m_i r_i^2$. In diesem Fall gibt es einfach nur einen einzigen Massepunkt.

5. Wie groß ist das Trägheitsmoment I für $m = 1\,\text{kg}$ und $r = 1\,\text{m}$?

   $I =$ ____________________

6. Was passiert, wenn die Masse verdoppelt, aber der Abstand halbiert wird?

Für den Grenzfall, in dem man eine unendliche Anzahl von Massenpunkten betrachtet, beispielsweise um geometrische Objekte wie eine homogene Vollkugel oder einen Zylinder zu beschreiben, geht die o.g. Summe in ein Integral über: $I = \int r_\perp^2 \rho(\vec{r})\, dV$ mit der Massenverteilung $\rho(\vec{r})$. Daraus lassen sich für simple Objekte einfache Formeln für das Trägheitsmoment herleiten, z.B.

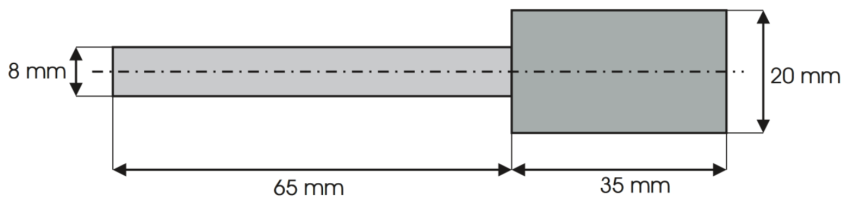
Homogene Vollkugel mit Masse m und Radius R bei Rotation um eine Achse durch den Schwerpunkt:

$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

Homogener Vollzylinder mit Masse m und Radius R bei Rotation um seine Symmetrieachse:

$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

Die Probekörper werden im Versuch auf einer Drillachse befestigt. Wie groß ist das Trägheitsmoment dieser Drillachse im Vergleich zu den typischen Trägheitsmomenten der Probekörper und damit die Verfälschung der Ergebnisse durch den Aufbau? Gehen Sie für die Abschätzung von folgendem aus: Die Drillachse besteht aus zwei zusammengefügten Vollzylindern aus Stahl. Die Maße sind der nachfolgenden Abbildung zu entnehmen. Für die Dichte von Stahl nehmen Sie $7850\,\mathrm{kg/m^3}$ an.



- Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Drillachse, indem Sie mit $I = \frac{1}{2} m R^2$ die Trägheitsmomente der beiden Vollzylinder einzeln berechnen und schließlich addieren.

- Als Beispiel für einen typischen Probekörper berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Vollzylinders mit Radius $R = 5\,\mathrm{cm}$ und der Masse $M = 500\,\mathrm{g}$. Wie groß ist das Verhältnis des Trägheitsmoments eines solchen Probekörpers gegenüber der Drillachse? Was schließen Sie daraus für den verfälschenden Einfluss der Drillachse auf die Messergebnisse?

2.3 Hauptträgheitsachsen

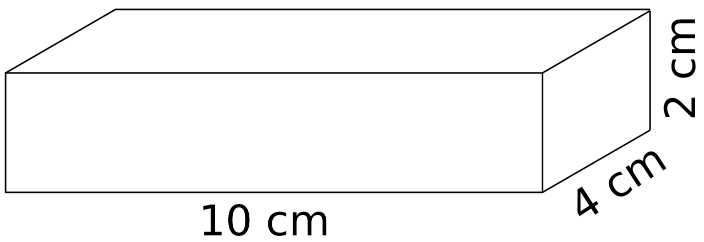
Bei der Verwendung des Begriffs *Hauptträgheitsachse* kommt es gelegentlich zu Missverständnissen, wenn gemeint ist *Hauptträgheitsachse durch den Schwerpunkt* ohne dies explizit kenntlich zu machen. Bei einer Rotation um eine Hauptträgheitsachse tritt keine *dynamische Unwucht* auf. Das bedeutet, es treten keine Kräfte auf, welche die Rotationsachse verkippen. Es kann jedoch eine *statische Unwucht* existieren. Diese erzeugt Kräfte, die zu einer

Parallelverschiebung der Rotationsachse führen und verschwindet nur bei Rotation um eine Hauptträgheitsachse **durch den Schwerpunkt**!

1. Wie viele Hauptträgheitsachsen durch den Schwerpunkt besitzt ein starrer Körper mindestens?

2. Um welche Achsen kann ein starrer Körper ohne äußere Kräfte im Allgemeinen rotieren?

3. Zeichnen Sie in die nachfolgende Abbildung eines homogenen Quaders alle Hauptträgheitsachsen durch den Schwerpunkt ein. Geben Sie an, welches Trägheitsmoment bei Rotation um diese Achsen das größte und kleinste ist. Logische Überlegung reicht, an dieser Stelle ist keine Rechnung erforderlich.



5. Wie viele Hauptträgheitsachsen durch den Schwerpunkt hat eine Kugel?

6. Angenommen die Drehachse wird vom Schwerpunkt weg parallel verschoben. Wird das Trägheitsmoment größer oder kleiner?

2.4 Steinerscher Satz

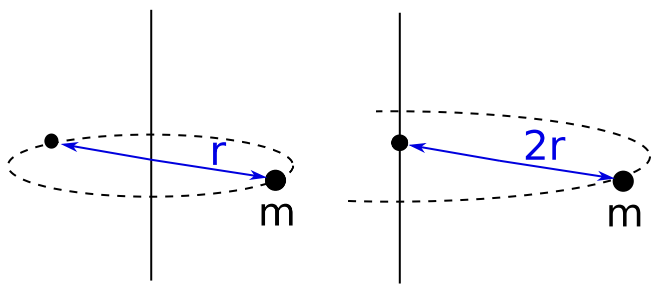
Der Steinersche Satz sagt aus, dass bei einer Drehbewegung, bei der die Drehachse um den Abstand a vom Schwerpunkt des Körpers verschoben ist, das Trägheitsmoment I durch

$$I = I_S + ma^2$$

gegeben ist. Dabei ist I_S das Trägheitsmoment für eine entsprechende parallele Drehachse durch den Schwerpunkt und m die Gesamtmasse des Körpers.

1. Zwei Massenpunkte mit Masse jeweils $m = 1\,\mathrm{kg}$ befinden sich im Abstand von $r = 0.5\,\mathrm{m}$ zu einer Drehachse durch ihren gemeinsamen Schwerpunkt, siehe Skizze. Wie groß ist das Trägheitsmoment?

   $I =$ ____________________________



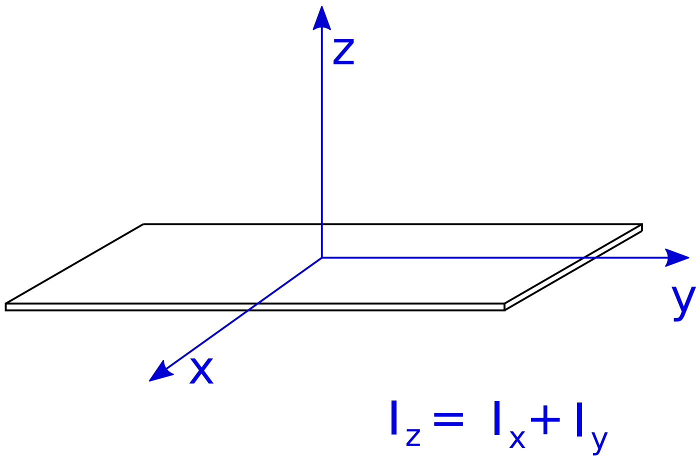
2. Jetzt wird die Rotationsachse um $0.5\,\mathrm{m}$ verschoben, d.h. $a = 0.5\,\mathrm{m}$, so dass die Drehachse durch einen der Massenpunkte geht. Berechnen Sie mithilfe des Satz von Steiner wie groß das Trägheitsmoment jetzt ist. Ist das Ergebnis konsistent mit 2.2.5? Warum, obwohl die Masse des gesamten Systems doppelt so groß ist?

2.5 Additionstheorem für das Trägheitsmoment einer flachen Scheibe

Auch bekannt als Satz über senkrechte Achsen. Ein etwas spezieller, aber dennoch interessanter Fall besteht, wenn der betrachtete Körper sehr flach ist. In diesem Fall sind die Trägheitsmomente bezüglich der Hauptträgheitsachsen durch den Schwerpunkt nicht mehr unabhängig von einander, sondern es gilt:

$$I_z = I_x + I_y \tag{2.1}$$

Hierbei wird die z-Achse senkrecht auf der Scheibe angenommen, mit x- und y-Achse orthogonal und in Scheibenebene.



1. Für eine Scheibe mit beliebigem Umriss ist also die Kenntnis von zwei der Trägheitsmomente ausreichend um auch das dritte zu bestimmen. Wie viele der Hauptträgheitsmomente durch den Schwerpunkt einer flachen **Kreisscheibe** müssen Sie kennen, um auch die übrigen zu kennen?

2.6 Drehpendel und harmonische Drehschwingung

Bei einem idealen Drehpendel handelt es sich um eine Form des harmonischen Oszillators. Anders als bei dessen häufiger anzutreffenden Realisierung in Form einer Masse an einer Feder findet die Bewegung hierbei nicht translatorisch statt, sondern durch Rotation. Dennoch ist die mathematische Beschreibung nahezu identisch. In Abschnitt 2.2 haben Sie bereits die Bewegungsgleichung für die Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse kennen gelernt:

$$M = I\,\ddot{\varphi}(t)$$

Der Aufbau des Drehpendels erlaubt sofort die Anwendung dieser Formel. Ein starrer Körper mit Trägheitsmoment I ist auf einer ort- und richtungsfesten Drehachse montiert. Das Drehmoment wird in diesem Versuch durch eine Spiralfeder erzeugt, d.h. wenn der Körper durch Drehung aus seiner Ruheposition ausgelenkt wird, bietet die Feder einen Widerstand und versucht wieder in Ruheposition zu gelangen. Wie groß dieses rücktreibende Drehmoment ist, hängt von der Auslenkung und der *Winkelrichtgröße* D^* (sozusagen der Stärke der Feder) ab.

Für eine ideale Feder gilt nach dem Hookeschen Gesetz Proportionalität zwischen Auslenkung und auslenkendem Drehmoment. Da das rücktreibende dem auslenkenden Drehmoment entgegen wirkt ergibt sich damit folgende Beziehung

$$M = -D^*\varphi$$

Das kann nun für M in der allgemeinen Bewegungsgleichung eingesetzt werden, und man erhält

$$-D^*\varphi(t) = I\,\ddot{\varphi}(t)$$

Um eine *Differentialgleichung* wie diese zu lösen, muss man einen geeigneten Ansatz finden. Das bedeutet nichts anderes, als dass man eine passende Funktion findet, und dann an die Gegebenheiten anpasst. Für Interessierte sei für die genaue Rechnung auf den Literaturanhang verwiesen, für alle anderen direkt zu einer Lösung:

$$\varphi(t) = A_0\,\sin(\omega t + \phi_0) \tag{2.2}$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{D^*}{I}} \tag{2.3}$$

Die Konstanten A_0 und ϕ_0 geben die Amplitude (= maximale Auslenkung im Verlauf der Bewegung) und den Auslenkwinkel zum Zeitpunkt $t = 0$ an und sind für die Auswertung dieses Versuchs uninteressant. Wichtig ist jedoch die sogenannte *Kreisfrequenz* ω. Hier besteht Verwechslungsgefahr mit der weiter oben behandelten Winkelgeschwindigkeit der Rotation, welche irritierenderweise ebenfalls mit ω bezeichnet wird!

Die Kreisfrequenz gibt an, wie schnell eine Schwingung abläuft. Immer wenn der Ausdruck ωt im Argument der Sinusfunktion im Verlauf der Zeit t ein Vielfaches von 2π annimmt, befindet sich das System wieder im Ausgangszustand, d.h. eine vollständige Schwingungsperiode hat stattgefunden. Offensichtlich passiert das schneller für größeres ω. Um das Trägheitsmoment I aus dem Schwingungsversuch mit einem Drehpendel zu bestimmen, reicht es also die zwei anderen Unbekannten in Gleichung 2.3 zu bestimmen. In diesem Fall ist das die Winkelrichtgröße D^* und die Kreisfrequenz ω.

Da es im Versuch am einfachsten ist, die Dauer einer Schwingungsperiode T mit einer Stoppuhr zu bestimmen, muss zuletzt noch die Umrechnung von T in ω bekannt sein:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2.4}$$

Eingesetzt in Gleichung 2.3 und umgestellt nach I ergibt sich folgende Formel, die Sie bei der Auswertung des Versuchs nutzen werden:

$$I = \frac{D^* T^2}{4\pi^2} \tag{2.5}$$

1. Welche Einheit hat D^*? ______________________

2. Was müssen Sie bestimmen, um I ausrechnen zu können? ______________________

3. Was zeichnet eine harmonische Schwingung aus?

   ____

   ____

4. Wenn die Feder stärker gewählt wird (größeres D^*), wird die Schwingung schneller oder langsamer?

   ____

3 Versuchsaufbau (zu Hause)

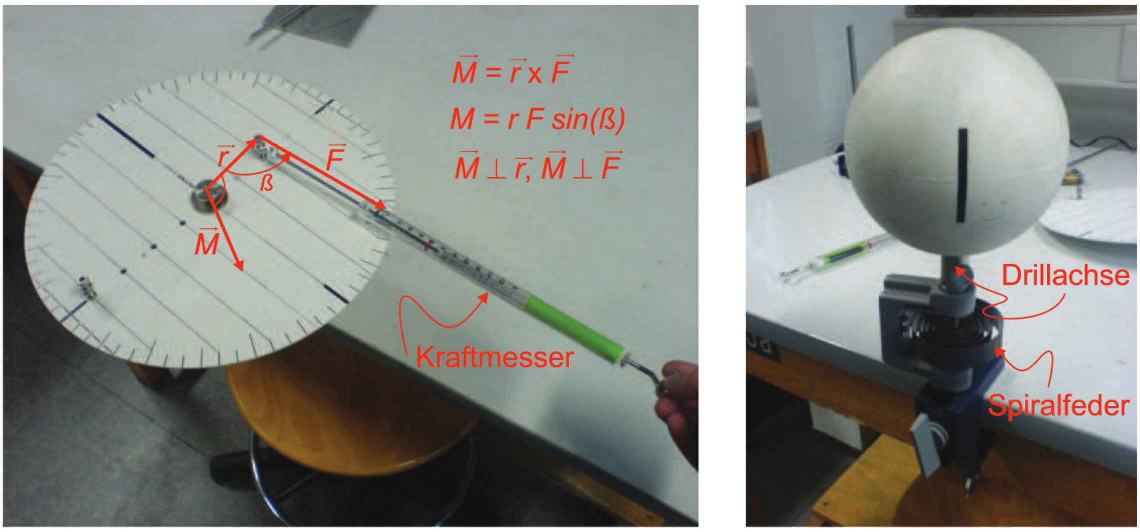


Abbildung 3.1: *Das Drehpendel zur Bestimmung von Trägheitsmomenten. Links: Mit dem Feder-Kraftmesser wird eine Kraft auf einen Hebelarm ausgeübt. Das Drehmoment führt zu einer Auslenkung um einen Winkel φ. Rechts: Zur Bestimmung des Trägheitsmoments der Kugel wird das Drehpendel in Schwingungen versetzt. Die Periodendauer T ist abhängig vom Trägheitsmoment der Kugel I Kund von der Winkelrichtgröße D^*.*

Der Versuchsaufbau besteht aus einer vertikal fixierten Drehachse mit angebrachter Spiralfeder. Für die vier Versuchsteile stehen folgende Zusatzmaterialien zur Anbringung auf die Drehachse zur Verfügung:

- Eine Winkelscheibe mit Befestigungsmöglichkeiten für den Federkraftmesser zur statischen Messung der Winkelrichtgröße
- eine Kunststoffkugel
- eine Stahlstange mit Markierungen und Halterung
- ein flacher Quader mit Befestigungsstücken zur Rotation um die Hauptträgheitsachsen

4 Versuchsdurchführung (im Praktikum)

Der Versuch besteht aus mehreren Teilen:

1. In Versuchsteil 1 soll die Winkelrichtgröße D^* der Spiralfeder bestimmt werden
2. In Versuchsteil 2 messen Sie das Trägheitsmoment einer als Drehpendel schwingenden Kugel und vergleichen den experimentell erhaltenen mit dem theoretischen Wert, den Sie aus der Masse und dem Radius ermitteln
3. Versuchsteil 3 beschäftigt sich mit der experimentellen Bestätigung des Steinerschen Satzes
4. Die vierte und letzte Aufgabe des Versuchs besteht im Nachweis eines Additionstheorems für die Trägheitsmomente eines flachen Körpers

Wichtig!

Die Auslenkung der Spiralfeder sollte 360° nicht überschreiten!

4.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße D^*

Für diesen Versuchsteil bringen Sie die Winkelscheibe an der Drillachse an. In verschiedenen Abständen von der Drehachse finden Sie Schrauben angebracht, in die Sie den Haken eines Feder-Kraftmessers einhängen können. Nun gilt es, den Auslenkwinkel in Abhängigkeit vom angewendeten Drehmoment zu bestimmen. Dazu lenken Sie nun die Winkelscheibe aus der Ruhelage aus und halten diese Position mithilfe des Federkraftmessers. Dabei muss die Kraft senkrecht zum Hebelarm angreifen, damit eine einfache Bestimmung des Drehmoments möglich ist (siehe Abbildung 3.1). Dazu achten Sie darauf, dass die Federwaage parallel zu den eingezeichneten Hilfslinien auf der Scheibe gehalten wird. Notieren Sie die Kraft der Feder, die Länge des Hebelarms (Abstand Schraube – Drehachse) und den Auslenkwinkel (vorher die Ruhelage möglichst genau bestimmen). Messen Sie die in der Tabelle angegebenen Winkelpositionen in jede Auslenkungsrichtung der Winkelscheibe. Dazu stehen zwei Hebelarme zur Verfügung. Überlegen Sie sich, welchen Hebelarm Sie sinnvoller Weise zur Auslenkung verwenden.

Auslenkung φ [°]	Auslenkung φ [rad]	Hebelarm Länge r [m]	Kraft F [N]
-360	$-\ 2\pi$		
-270	$-\ \frac{3}{2}\pi$		
-180	$-\ \pi$		
-90	$-\ \frac{1}{2}\pi$		
0	0		
+90	$\frac{1}{2}\pi$		
+180	π		
+270	$\frac{3}{2}\pi$		
+360	2π		

Tabelle 4.1: *Tragen Sie hier Ihre Messwerte für Versuchsteil 1 ein.*

ΔF [N]	$\Delta\varphi$ [rad]	Δr [m]

Tabelle 4.2: *Die Fehler der gemessenen Werte können abgeschätzt werden.*

4.2 Bestimmung des Trägheitsmoments einer Vollkugel

Für die folgenden Versuchsteile wird die Winkelscheibe nicht mehr benötigt. Nehmen Sie sie ab und bringen Sie für diesen Versuchsteil die Kugel auf dem Drehpendel an und bestimmen Sie fünfmal die Zeit für 10 Schwingungen der schwingenden Kugel. Notieren Sie sich die Masse der Kugel und messen Sie mit der Schieblehre den Durchmesser.

Masse der Kugel mit Fehler: $m \pm \Delta m =$ ____________________

Durchmesser der Kugel mit Fehler: $d \pm \Delta d =$ ____________________

Messung #	Zeit T_{10} [s]
1	
2	
3	
4	
5	

Tabelle 4.3: *Tragen Sie hier Ihre Messwerte für jeweils 10 Schwingungen aus Versuchsteil 2 ein.*

4.3 Nachweis des Steinerschen Satzes

Bestimmen Sie bei der langen Eisenstange das Trägheitsmoment für zwei parallele Achsen,von denen eine durch den Schwerpunkt gehen soll. Dazu fixieren Sie den Adapter, mit dem die Stange auf dem Pendel angebracht wird, jeweils an den markierten Stellen. Messen Sie wieder für beide Achsen jeweils fünfmal die Zeit für etwa 10 Schwingungen.

Masse des Stabs: $M = 132.6 \pm 0.5$ g

Abstand der gemessenen Achsen mit Fehler: $a \pm \Delta a =$ ____________________

Messung #	Zeit $T_{10,SP}$ [s] (Schwerpunktachse)	Zeit $T_{10,a}$ [s] (Verschobene Achse)
1		
2		
3		
4		
5		

Tabelle 4.4: *Tragen Sie hier Ihre Messwerte für jeweils 10 Schwingungen aus Versuchsteil 3 ein.*

4.4 Additionstheorem für das Trägheitsmoment einer flachen Scheibe

Bestimmen Sie für die flache, rechteckige Aluminiumscheibe die Trägheitsmomente um die drei Symmetrieachsen. Benutzen Sie hierfür die entsprechenden Adapter, um die Scheibe auf dem Drehpendel anzubringen. Messen Sie auch hier für jede Achse fünf Mal die Zeit für 10 Schwingungen.

Messung #	T_{10} (x-Achse)	T_{10} (y-Achse)	T_{10} (z-Achse)
1			
2			
3			
4			
5			

Tabelle 4.5: *Tragen Sie hier Ihre Messwerte für jeweils 10 Schwingungen aus Versuchsteil 4 ein.*

AT: ______________________ ______________________________________

(Datum) (Unterschrift des Assistenten)

5 Auswertung (zu Hause)

Wichtiger Hinweis

Für die Auswertung der Versuche im Anfängerpraktikum ist es zwingend erforderlich, die nötigen Methoden der Fehlerrechnung zu verstehen und anwenden zu können. Hilfestellung dazu ist u.A. ist hier zu finden:

https://teaching.astro.uni-koeln.de/sites/default/files/praktikum_a/Anleitung_zur_Fehlerrechnung.pdf

https://teaching.astro.uni-koeln.de/sites/default/files/praktikum_a/allgemeine_Hilfen_Praktikum_A.pdf

5.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße D^*

Gehen Sie bei diesem Teil der Auswertung besonders konzentriert vor. Das hier gewonnene Teilergebnis brauchen Sie auch in anderen Teilen der Auswertung und ein Fehler pflanzt sich entsprechend fort.

Berechnen Sie das Drehmoment M (aus den Werten für F und r, die Sie in Tabelle 4.1 notiert haben) in Abhängigkeit des Winkels φ (im Bogenmaß!) und tragen Sie die Ergebnisse in die nachfolgende Tabelle ein. Stellen Sie diese Wertepaare mit Fehlerbalken für $\Delta\varphi$ und ΔM graphisch in einem Diagramm dar. Eine graphische Geradenanpassung liefert Ihnen die Winkelrichtgröße D^* mit dem Fehler ΔD^*.

- Das Drehmoment berechnet sich nach $M = r \cdot F$.

- Um M zu berechnen, setzen Sie die fehlerbehafteten Eingangsgrößen r und F ein. Bestimmen sie mithilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung die Fehlerformel für ΔM.

φ [rad]	r [m]	F [N]	M [Nm]	ΔM [Nm]
- 2π				
- $\frac{3}{2}\pi$				
- π				
- $\frac{1}{2}\pi$				
0				
$\frac{1}{2}\pi$				
π				
$\frac{3}{2}\pi$				
2π				

Tabelle 5.1: *Tragen Sie hier Ihre Ergebnisse für das Drehmoment in Abhängigkeit des Auslenkwinkels ein.*

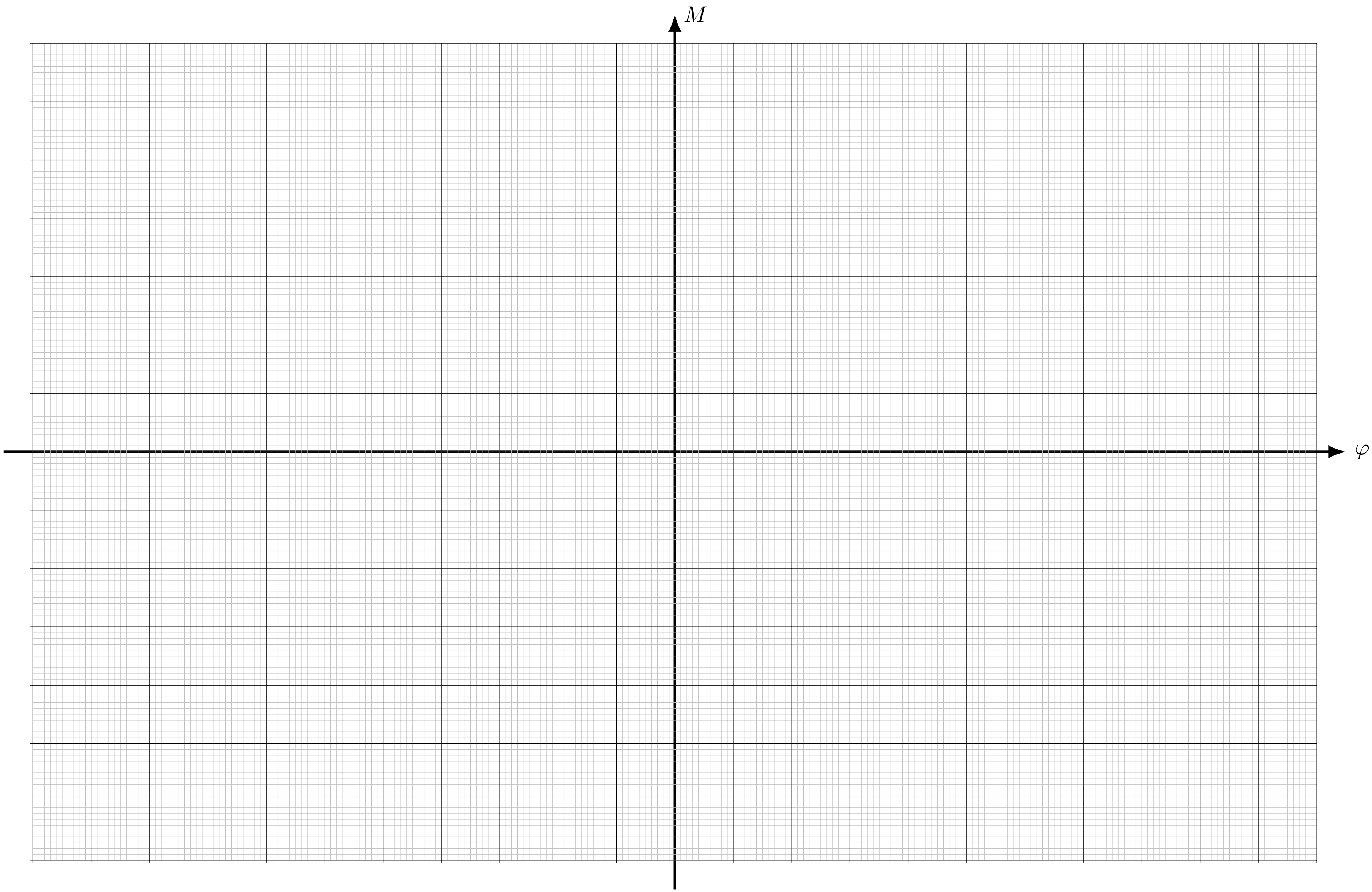


Abbildung 5.1: *Bestimmung der Winkelrichtgröße D^*. Tragen Sie eine sinnvolle Achseneinteilung ein und ergänzen Sie die verwendeten Einheiten. Tragen Sie dann die Wertepaare für $M(\varphi)$ und die zugehörigen Fehlerbalken ein. Führen Sie dann die graphische Geradenanpassung durch.*

In Abbildung 5.1 sollten Sie nun bereits eine Maximal- und Minimalgerade eingezeichnet haben. Berechnen Sie aus deren Steigungen die Steigung der Ausgleichsgerade. Diese entspricht der gesuchten Winkelrichtgröße D^*.

$$a_{max} = \underline{\hspace{6cm}}$$

$$a_{min} = \underline{\hspace{6cm}}$$

$$D^* = \frac{|a_{max} + a_{min}|}{2} = \underline{\hspace{6cm}}$$

$$\Delta D^* = \frac{|a_{max} - a_{min}|}{2} = \underline{\hspace{6cm}}$$

1. Warum entspricht die Steigung der Ausgleichsgeraden der gesuchten Winkelrichtgröße D^*? Machen Sie sich klar, dass der gezeichnete Graph der Funktion $M(\varphi) = D^*\varphi$ entspricht. Erkennen Sie, welche Form diese Funktion hat?

5.2 Bestimmung des Trägheitsmoments einer Vollkugel

Berechnen Sie aus dem Mittelwert der Schwingungsdauer und der im vorherigen Teil bestimmten Winkelrichtgröße das Trägheitsmoment I der Kugel.

Bilden Sie den Mittelwert $\overline{T}_{10}$ der 5 Schwingungsdauern T_{10} aus Tabelle 4.3:

$$\overline{T}_{10} = \underline{\hspace{6cm}}$$

Daraus ergibt sich für die Dauer einer einzelnen Schwingung:

$$\overline{T} = \overline{T}_{10}/10 = \underline{\hspace{6cm}}$$

Berechnen Sie daraus nun das Trägheitsmoment nach

$$I = \frac{D^* \overline{T}^2}{4\pi^2} \tag{5.1}$$

An dieser Stelle muss nun ebenfalls der Fehler ΔI berechnet werden. Da in die Formel für I die beiden fehlerbehafteten Größen D^* und $\overline{T}$ einfließen, müssen Sie deren Fehler kennen. Der Fehler ΔD^* ist aus Teil 5.1 bereits bekannt, $\Delta\overline{T}$ muss noch bestimmt werden.

Berechnen Sie dazu die Standardabweichung der 5 Messungen für T_{10} durch

$$\Delta T_{10} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_i \left(T_{10,i} - \overline{T}_{10}\right)^2} \tag{5.2}$$

wobei $T_{10,i}$ die 5 unabhängig gemessenen Zeiten aus Tabelle 4.3 bezeichnet, $\overline{T}_{10}$ wieder deren Mittelwert und N die Größe der Stichprobe (in unserem Fall 5).

Sobald ΔT_{10} bekannt ist, können Sie auch den Fehler des Mittelwerts $\Delta\overline{T}_{10}$ bestimmen:

$$\Delta\overline{T}_{10} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_i \left(T_{10,i} - \overline{T}_{10}\right)^2} = \frac{\Delta T_{10}}{\sqrt{N}} \tag{5.3}$$

Um weiter zu rechnen muss selbstverständlich auch dieser Wert zunächst für eine einzelne Schwingung statt für 10 Schwingungen bestimmt werden. Da es sich **nicht** um 10 unabhängige Messungen handelt, wird $\Delta\overline{T}_{10}$ einfach durch 10 geteilt:

$\Delta\overline{T} = \Delta\overline{T}_{10}/10$ ______________________________

Um schließlich den Fehler ΔI auszurechnen haben Sie jetzt alle Werte, die dafür benötigt werden. Das einzige was noch fehlt, ist die Fehlerformel. Berechnen Sie diese anhand der

Gaußschen Fehlerfortpflanzung aus

$$I = \frac{D^* T^2}{4\pi^2} \tag{5.4}$$

$$\Delta I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial T} \cdot \Delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial D^*} \cdot \Delta D^*\right)^2} \tag{5.5}$$

und setzten Sie die bereits berechneten Werte für $\overline{T}$, $\Delta\overline{T}$, D^* und ΔD^* ein, um das Ergebnis zu berechnen.

- Zur Kontrolle: Das Ergebnis der Fehlerformel lautet $\Delta I = \sqrt{\left(\frac{D^* T}{2\pi^2} \cdot \Delta T\right)^2 + \left(\frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \Delta D^*\right)^2}$ und kann nicht weiter vereinfacht werden.

Das experimentelle Endergebnis für diesen Aufgabenteil lautet damit:

$$I \pm \Delta I = \underline{\hspace{6cm}}$$

Vergleichen Sie den erhaltenen Wert für $I \pm \Delta I$ mit dem theoretischen Wert $I_{theo} = \frac{2}{5} M R^2$ indem Sie diesen berechnen.

Den Durchmesser der Kugel haben Sie in der Versuchsdurchführung gemessen (Umrechnung in Radius nicht vergessen!). Geben Sie auch hier einen Fehler an, indem Sie die Gaußsche Fehlerfortpflanzung anwenden um eine Fehlerformel für ΔI_{theo} zu erhalten.

Wie gut stimmen Experiment und Theorie überein? Sind die Ergebnisse innerhalb der Fehlergrenzen miteinander verträglich?

5.3 Nachweis des Steinerschen Satzes

Berechnen Sie wie im letzten Teil die Zeit $\overline{T}$ für **eine** Schwingungsperiode.

Bilden Sie dazu zunächst wieder den Mittelwert $\overline{T}_{10}$ der 5 Schwingungsdauern $T_{10,SP}$ und

$T_{10,a}$ aus Tabelle 4.4 für die Messungen mit Schwerpunktachse und und der um den Abstand a verschobenen Achse:

$$\overline{T}_{10,SP} = \underline{\hspace{6cm}}$$

$$\overline{T}_{10,a} = \underline{\hspace{6cm}}$$

Berechnen Sie jetzt wie bereits zuvor die Standardabweichung der gemessenen Zeiten $\Delta T_{10,SP}$ und $\Delta T_{10,a}$ durch Formel 5.2.

$$\Delta T_{10,SP} =$$

$$\Delta T_{10,a} =$$

Für den Fehler des Mittelwerts wird wieder durch die Wurzel des Umfangs der Messreihe geteilt:

$$\Delta\overline{T}_{10,SP} = \Delta T_{10,SP}/\sqrt{N} = \underline{\hspace{6cm}}$$

$$\Delta\overline{T}_{10,a} = \Delta T_{10,a}/\sqrt{N} = \underline{\hspace{6cm}}$$

Daraus ergibt sich für die Dauer der einzelnen Schwingungen und ihre Fehler genau wie im vorhergehenden Teil der Auswertung:

$\overline{T}_{SP} = \overline{T}_{10,SP}/10 =$ ______________________________

$\Delta\overline{T}_{SP} = \Delta\overline{T}_{10,SP}/10 =$ ______________________________

$\overline{T}_{a} = \overline{T}_{10,a}/10 =$ ______________________________

$\Delta\overline{T}_{a} = \Delta\overline{T}_{10,a}/10 =$ ______________________________

Berechnen Sie auch hier aus dem Mittelwert der Schwingungsdauern die Trägheitsmomente I_{SP} und I_a der Stange um die beiden Drehachsen durch

$$I = \frac{D^* T^2}{4\pi^2} \tag{5.6}$$

Auch hier gilt es erneut, den Fehler des Ergebnisses zu bestimmen (die Vorgehensweise und die Fehlerformel ist dieselbe wie 5.2):

Das Endergebnis für diesen Aufgabenteil lautet damit:

$I_{SP} \pm \Delta I_{SP} =$ ____________________

$I_a \pm \Delta I_a =$ ____________________

Sind die Ergebnisse mit dem Satz von Steiner (Gleichung 2.4) vereinbar?

Überprüfen sie das, indem Sie zunächst den theoretisch erwarteten Wert $I_{a,Steiner}$ berechnen:

$$I_{a,Steiner} = I_{SP} + Ma^2 \tag{5.7}$$

Der Stab hat eine Masse von $M = (132.6 \pm 0.5)$g. Da auch die hier eingesetzten Messgrößen fehlerbehaftet sind (ΔI_{SP}, Δa und ΔM), muss auch die Fehlerformel für $\Delta I_{a,Steiner}$ mithilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung gefunden werden:

Das Endergebnis für $I_{a,Steiner}$ ist damit:

$I_{a,Steiner} \pm \Delta I_{a,Steiner} =$ ______________________________

Kann der Steinersche Satz im Rahmen der ermittelten Fehlergrenzen experimentell bestätigt werden? Wie gut stimmen die erhaltenen Werte I_a und $I_{a,Steiner}$ überein?

5.4 Additionstheorem für das Trägheitsmoment einer flachen Scheibe

Überprüfen Sie die Beziehung für Trägheitsmomente flacher Körper (d.h. $z \approx 0$)

$$I_z = I_x + I_y \tag{5.8}$$

mit den Trägheitsmomenten um die Symmetrieachsen in der Scheibenebene I_x und I_y und dem Trägheitsmoment um die Symmetrieachse senkrecht zur Scheibenebene I_z, siehe Skizze in Teil 2.5.

Berechnen Sie dazu zunächst wieder die Mittelwerte $\overline{T}_{10,x}$ der 5 Messungen aus Tabelle 4.5, sowie deren Fehler $\Delta\overline{T}_{10,x}$ und daraus die entsprechenden Werte einer einzelnen Schwingung $\Delta\overline{T}$ und $\Delta\overline{T}$. Das Vorgehen zur Ermittlung der Fehler ist identisch zu den beiden vorhergehenden Aufgabenteilen.

	$\overline{T}_{10}$	$\Delta\overline{T}_{10}$	$\overline{T}$	$\Delta\overline{T}$
x-Achse				
y-Achse				
z-Achse				

Weisen Sie das Additionstheorem 5.8 mithilfe dieser Werte nach. Die Bestimmung der einzelnen Trägheitsmomente gemäß Gleichung 2.5 ist dafür nicht notwendig, die Rechnung kann abgekürzt werden zu $T_z^2 = T_x^2 + T_y^2$.

$T_z^2 \pm \Delta T_z^2 =$ ______________________

$T_x^2 + T_y^2 =$ ______________________

Gaußsche Fehlerfortpflanzung für $T_x^2 + T_y^2$ ergibt den Fehler:

$$\Delta(T_x^2 + T_y^2) = \sqrt{(2T_x \cdot \Delta T_x)^2 + (2T_y \cdot \Delta T_y)^2} = \text{______________________}$$

Kann damit Gleichung 5.8 im Rahmen der Fehlergrenzen bestätigt werden?

6 Diskussion der Ergebnisse (zu Hause)

Ist die Annahme einer idealen Feder gerechtfertigt? Wie zeigt sich das im Diagramm?

Welche Fehlerquellen gibt es in diesem Versuch?

Welche Maßnahmen könnten Sie zur Reduzierung der Fehler anwenden?

7 Herleitungen und Definitionen

Trägheitsmomente beliebiger Körper

Das Trägheitsmoment eines starren Körpers mit beliebiger Massenverteilung mit Rotationsachse $\vec{\omega}$ durch den Koordinatenursprung ist gegeben durch

$$I = \int_V \rho(\vec{r})\vec{r}_\perp^2 \, dV \tag{7.1}$$

mit dem zu $\vec{\omega}$ orthogonalen Anteil $\vec{r}_\perp$ von $\vec{r}$. Für manche Anwendungen macht es Sinn, einen Körper zu betrachten, der aus i diskreten Massepunkten besteht. Die o.g. Definition ist dann kein kontinuierliches Raumintegral mehr, sondern eine Summe:

$$I = \sum_i m_i r_{i,\perp}^2 \tag{7.2}$$

Satz von Steiner

Für eine um den Vektor $\vec{a} \perp \vec{\omega}$ parallelverschobene Rotationsachse $\vec{\omega}$ gilt laut Definition von I:

$$I_a = \int_V \rho(\vec{r})(\vec{r}_\perp - \vec{a})^2 \, dV \tag{7.3}$$

Ausmultiplizieren des quadratischen Terms führt auf

$$I_a = \underbrace{\int_V \rho(\vec{r})\vec{r}_\perp^2 \, dV}_{=I} + \vec{a}^2 \underbrace{\int_V \rho(\vec{r}) \, dV}_{=M} - 2\vec{a} \underbrace{\int_V \rho(\vec{r})\vec{r}_\perp \, dV}_{\substack{=0 \text{ für Ursprung} \\ \text{im SP}}} \tag{7.4}$$

Der erste Term entspricht gerade Definition 7.1 von I für die unverschobene Rotationsachse, das zweite Integral entspricht der Gesamtmasse. Der letzte Term verschwindet, wenn der Koordinatenursprung (und damit auch die Rotationsachse nach 7.1) im Schwerpunkt gewählt wird. Daher gilt:

$$I_a = I_{SP} + a^2 m \tag{7.5}$$

8 Literatur

- https://teaching.astro.uni-koeln.de/sites/default/files/praktikum_a/Anleitung_zur_Fehlerrechnung.pdf
- Meschede, Dieter: **Gerthsen Physik**, 2015, ISBN 978-3-662-45977-5
- Westphal, Wilhelm H.: **Physikalisches Praktikum**, 1971, ISBN 978-3-663-01918-3
- Walcher, Wilhelm: **Praktikum der Physik**, 2006, ISBN 978-3-8351-0046-6