

I. Physikalisches Institut
Universität zu Köln

W04: Bestimmung von $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$



PRAKTIKUM A FÜR NEBENFÄCHLER

Version vom 2. Juni 2023

Abzugeben bis: _____

Assistent: _____

Gruppenmitglieder: _____

Wichtige Informationen

Zur Bearbeitung ist es zwingend erforderlich, dass Sie sich mit den Grundlagen der Fehlerrechnung (u. a. Gaußsche Fehlerfortpflanzung, (gewichteter) Fehler des Mittelwerts, grafische Geradenanpassung) vertraut machen. Informationen dazu finden Sie beispielsweise im Dokument „allgemeine Hilfen für das Praktikum A“ auf der Webseite des A-Praktikums^a.

Aufgrund des Umfangs dieses Versuchs ist es nötig die Blätter mittels Schnellhefter o. ä. zu binden. Bitte lochen Sie die Blätter und heften Sie diese sorgfältig ein. Sollte die Form der Abgabe nicht den Regularien entsprechen, kann die*der Assistent*in die Annahme der Auswertung verweigern.

Versuchen Sie innerhalb der vorgegebenen Lücken zu bleiben. Diese geben ungefähr den an entsprechender Stelle erwarteten Umfang vor. Sollte der Platz dennoch nicht ausreichen, fügen Sie ganze Blätter ein, auf welchen deutlich markiert ist, was wozu gehört.

Beachten Sie bitte, dass alle entsprechenden Lücken und Fragestellungen ausgefüllt und beantwortet werden müssen. Insbesondere sind Lücken bis hin zum Messprotokoll bereits vor dem Versuchstag zu bearbeiten. Dies müssen Sie vor Ort nachweisen und wichtige Inhalte frei wiedergeben können. Es wird davon ausgegangen, dass alle Gruppenmitglieder die vollständige Anleitung durchgelesen und verstanden haben. Sollten Sie am Versuchstag nicht ausreichend auf den Versuch vorbereitet sein, wird die*der Assistent*in Sie nicht am Versuch teilnehmen lassen.

Die Abgabe muss alle Seiten umfassen, insbesondere aber Seiten mit auszufüllenden Lücken. Dazu gehören in jedem Fall die Titelseite, die Vorbereitung, das Messprotokoll und die Auswertung mit Diskussion.

Alle auf dem Deckblatt aufgeführten Gruppenmitglieder sind für die Bearbeitung und fristgerechte Abgabe des Versuchsberichts bzw. dessen erforderlichen Korrekturen zuständig und verantwortlich. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass Sie sich mit den Regeln des A-Praktikums^a vertraut gemacht haben.

^a zu finden unter: <https://www.astro.uni-koeln.de/AP/>

Es ist nicht notwendig den Anhang mit auszudrucken. Allerdings kann dieser gerade bei Detailfragen enorm weiterhelfen und soll durchgelesen und verstanden sein.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Vorbereitung (vor dem Praktikum, zu Hause)	2
2.1	Allgemeine Begriffe der Wärme	2
2.2	Formeln und erwartete Werte des Adiabatenexponenten	5
2.3	Allgemeine Versuchsfragen	8
3	Versuchsaufbau und -beschreibung	9
3.1	Versuchsaufbau nach Nicolas Clément-Desormes	9
3.2	Versuchsaufbau nach Eduard Rüchardt	9
4	Benötigte Formeln	11
4.1	Bestimmung des Adiabatenexponenten nach Clément-Desormes	11
4.2	Bestimmung des Adiabatenexponenten nach Rüchardt	11
5	Durchführung (im Praktikum)	12
5.1	Methode nach Nicolas Clément-Desormes	13
5.2	Methode nach Eduard Rüchardt	13
6	Auswertung (zu Hause)	15
6.1	Bestimmung des Adiabatenexponenten nach Clément-Desormes	15
6.2	Bestimmung des Adiabatenexponenten nach Rüchardt	17
7	Diskussion	21
8	Quellen und weiterführende Literatur	24
9	Anhang	25
9.1	Weiterführende Anmerkungen zum theoretischen Hintergrundwissen	25
9.2	Fehler(formeln) und Methoden	32

1 Einleitung

In diesem Versuch werden die beiden Methoden von Eduard Rüchardt und Nicolas Clément-Desormes verwendet um die Adiabatenexponenten von Luft und Argon zu bestimmen. Der Adiabatenexponent γ , auch Isentropenexponent genannt, beschreibt u. a. das Verhältnis der Wärmekapazitäten eines Gases bei konstantem Druck (C_p) und konstantem Volumen (C_V), $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$. Diese Größe taucht in mehreren Beschreibungen von Gasprozessen, wie z. B. Zustandsänderungen, auf. Ein Beispiel dafür ist das Poisson-Gesetz, welches in seiner gängigsten Form den Druck p und das Volumen V eines Gases bei adiabatischen Zustandsänderungen verbindet, $p \cdot V^\gamma = \text{const}$. Im Folgenden wird die Theorie dieser Größe skizziert und die beiden Versuchsaufbauten nach den oben genannten Personen beschrieben.

Der Aufbau nach Clément-Desormes sieht vor die Höhe einer Wassersäule, stellvertretend für den Druck eines Gases, auf einer Seite eines U-Rohr-Manometers in drei Zuständen abzulesen. Der Zusammenhang dieser drei Zustände lässt sich mit Hilfe des Adiabatenexponenten beschreiben, sodass über die genannten Messungen der Wert von γ für das entsprechende Gas bestimmt werden kann.

Bei der Methode nach Rüchardt führt ein Zylinder in einem Rohr auf einer mit einem Gas gefüllten Flasche Schwingungen durch, welche soweit wie möglich einer harmonischen Schwingung angenähert werden. Die Eigenschaften der harmonischen Schwingung hängen neben weiteren Parametern auch vom Adiabatenexponenten ab. Sind die anderen Größen des Aufbaus bekannt, kann letztendlich auch hier auf den Wert von γ zurückgeschlossen werden.

2 Vorbereitung (vor dem Praktikum, zu Hause)

Der folgende Abschnitt bezieht sich auf theoretische Überlegungen und Grundlagen dieses Versuchs. Ergänzungen und weiterführende Anmerkungen befinden sich im Anhang (Abschnitt [9]) und sind entsprechend hier markiert.

Beachten Sie bitte, dass die Lücken in diesem Abschnitt auszufüllen sind und am Versuchstag vorgezeigt werden müssen. Um an dem Versuch teilnehmen zu können, müssen Sie die Anleitung vollständig gelesen und verstanden haben und allgemein auf den Versuch vorbereitet sein.

2.1 Allgemeine Begriffe der Wärme

2.1.1 Thermodynamische Hauptsätze

Es existieren vier thermodynamische Hauptsätze, welche grundlegende Eigenschaften der Thermodynamik zusammenfassen.

- **0. Hauptsatz:** Stehen die Systeme A und B sowie die Systeme B und C jeweils im thermodynamischen Gleichgewicht, dann befinden sich auch die Systeme _____ und _____ im Gleichgewicht.

- **1. Hauptsatz:** In einem abgeschlossenen System ist die Energie konstant. Ein geschlossenes System kann im Gegensatz dazu Energie in Form von Wärme oder Arbeit mit der Umgebung austauschen, sodass sich die innere Energie U durch am System verrichtete Arbeit W oder/und zu- oder abgeführte Wärme Q ändern kann¹,

$$\Delta \text{_____} = \Delta \text{_____} + \Delta \text{_____}. \quad (1)$$

- **2. Hauptsatz:**² Thermische Energie ist nicht beliebig in andere Energieformen umwandelbar, was durch die Zustandsgröße Entropie S beschrieben wird. Es gilt für ein abgeschlossenes (= geschlossenes adiabates) System immer $\Delta S \geq 0$, also die Entropie

des Systems kann nicht _____ .

- **3. Hauptsatz:** Es ist unmöglich ein System auf den absoluten _____ abzukühlen.

¹Streng genommen müsste die Formel mit Hilfe von (un-)vollständigen Differentialen dargestellt werden. Zur Vereinfachung wird sie hier allerdings entsprechend vieler Lehrbücher durch Differenzen ausgedrückt.

²Es existieren viele verschiedene Formulierungen des 2. HS, welche meist jedoch äquivalent zueinander sind.

sche Zustandsänderung. Bei dieser wird keine _____ mit der Umgebung ausgetauscht, d. h. für Gl. 1, $\Delta Q = 0$.

2.1.4 Wärmekapazität

Die Wärmekapazität C eines Stoffes beschreibt das Verhältnis von dem Körper zugeführter Energie in Form von Wärme Q und der erreichten Änderung der Temperatur T ,

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}. \quad (3)$$

Ein Beispiel: Es ist eine bestimmte Menge einer unbekanntes, homogenen Flüssigkeit gegeben, deren Temperatur sich durch Zuführung von 2 J Wärmeenergie um 1 K ($\hat{=} 1^\circ\text{C}$)³

erhöht hat. Die Wärmekapazität dieser Menge Flüssigkeit beträgt dann _____ $\frac{\text{J}}{\text{K}}$. Würden wir nun die Menge der Flüssigkeit halbieren, würden für die gleiche Erhöhung der

Temperatur um 1 K nun _____ J Wärmeenergie benötigt, d. h. die Wärmekapazität ist

nun _____ so groß wie zuvor.

Um den Faktor Menge, bzw. Masse, zu eliminieren und eine stoffspezifische Größe zu erhalten, wird einfach durch die Masse des jeweiligen Stoffes geteilt. Damit ergibt sich die spezifische Wärmekapazität c des Stoffes, $c = \frac{C}{m} = \frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta T}$.

Die beiden für diesen Versuch relevanten Spezialfälle der Wärmekapazität bei konstantem Druck und konstantem Volumen werden im Anhang in Abschnitt [9.1.1] formeller behandelt.

Aufgrund des Zusammenhangs $C = c \cdot m$ besteht die Möglichkeit den Ausdruck für den Adiabatenexponenten $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ mit Hilfe der spezifischen Wärmekapazitäten auszudrücken, da die Masse im Bruch wegfällt, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$.

2.1.5 Äquipartitionsgesetz

Das Äquipartitionsgesetz ist auch als Äquipartitionstheorem oder Gleichverteilungssatz bekannt und beschreibt die mittlere Energie eines Systems in Abhängigkeit seiner Temperatur und seiner angeregten Freiheitsgrade. Es besagt, dass eben jeder solcher Freiheitsgrad im Mittel die gleiche Energie besitzt, sodass für ein Teilchen des Systems gilt

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{f}{2} k_B T, \quad (4)$$

also besitzt jeder Freiheitsgrad f die mittlere Energie $\langle E_{\text{kin}} \rangle =$ _____ .

³Die Kelvin- und Celsius-Skala sind so definiert, dass eine exakte lineare Verschiebung um den Wert 273,15 vorliegt. Deshalb sind Temperaturdifferenzen per Definition für beide Skalen gleich, während sich die absoluten Werte unterscheiden: $T_K \neq T_{\circ\text{C}}$, aber $\Delta T_K = \Delta T_{\circ\text{C}}$.

2.2.2 Die erwarteten Werte für Luft und Argon

In Abschnitt [2.2.1] wurde erläutert wie anhand der Anzahl an Freiheitsgraden der Adiabatenexponent einfach abgeschätzt werden kann. Dieser Versuch behandelt die Gase Argon und Luft, daher ist nun die Frage, wie viele Freiheitsgrade diese Gase jeweils besitzen. Generell gibt es bei Gasen meist drei Typen von Freiheitsgraden die von Interesse sind, Translations-, Rotations- und Vibrationsfreiheitsgrade.

Translationsfreiheitsgrade beziehen sich auf räumliche Bewegungen, also eine Änderung des Ortes in x -, y - oder/und z -Richtung. Rotationsfreiheitsgrade kommen von Rotationen der Gasteilchen, bspw. Moleküle, um ihren Massenschwerpunkt und Vibrationsfreiheitsgrade von Vibrationen der Atome in einem Molekül.

Argon ist ein Edelgas und kommt einatomig vor. Die Atome können sich in alle drei Raumrichtungen bewegen, Rotationen und Vibrationen ergeben jedoch wenig(er) Sinn⁴. Somit

ergeben sich für Argon insgesamt _____ Freiheitsgrade, also $f =$ _____ und somit

$\gamma =$ _____ .

Luft besteht zu rund 99% aus den zwei Elementen _____ und

_____, welche beide regulär als zweiatomige Moleküle vorkommen. Das bedeutet als Vereinfachung reicht es aus nur die Freiheitsgrade für zweiatomige Moleküle zu betrachten. Translationen sind unabhängig von der Art der Gasteilchen und auch hier wieder mit allen drei Raumrichtungen vertreten. Bei Rotationen sind jedoch die vorherrschenden Rahmenbedingungen relevant. Rotationen um die zwei Raumachsen, welche senkrecht zur Verbindungsachse der Atome sind, sind unter Normalbedingungen⁵ anregbar, während sich die Rotationsachse parallel zur dritten Raumachse ähnlich wie ein einzelnes Atom verhält. Dieser dritte Freiheitsgrad ist somit unter Normalbedingungen zu vernachlässigen. Vibrationsfreiheitsgrade sind im Rahmen von Normalbedingungen ebenso nicht

angeregt⁶. Damit bleiben für Luft _____ Translations- und _____ Rotationsfrei-

heitsgrade, also insgesamt $f =$ _____ und $\gamma =$ _____ .

⁴Während Vibrationen bei einem einzelnen Atom tatsächlich wenig sinnvoll sind, lassen sich Rotationen auch dabei noch vorstellen. Allerdings gehen wir von ausdehnungslosen Masseteilchen eines idealen Gases aus und können Rotationszustände unter Normalbedingungen nicht beobachten.

⁵In der Physik bedeuten Normalbedingungen, dass eine Temperatur von 273,15 K und ein Druck von 1013,25 hPa vorliegt. (In Deutschland geregelt durch DIN 1343.)

⁶Vibrationsfreiheitsgrade von Luft werden bei Normaldruck (s. o.) erst bei mehreren 100 °C angeregt und können somit in diesem Versuch vernachlässigt werden.

2.2.3 Das Poisson-Gesetz

Die Poisson-Gleichung beschreibt adiabatische Zustandsänderungen. Wie bereits erläutert,

handelt es sich dabei um Zustandsänderungen bei denen keine _____ mit der Umgebung ausgetauscht wird, also $\Delta Q = 0$. Die Gleichung lautet

$$p \cdot V^\gamma = \text{const.} \quad (7)$$

Es gibt verschiedene Formulierungen, welche mittels des idealen Gasgesetzes (Gl. 2) ineinander überführbar sind. Im p - V -Diagramm (siehe Abb. 1), ein Phasendiagramm mit dem Druck p auf der y -Achse und dem Volumen V auf der x -Achse, lassen sich adiabatische Zustandsänderungen in Form von Kurven darstellen, welche Adiabaten genannt werden. Die jeweilige Kurvenform der Adiabaten eines Gases wird von dem Exponenten γ bestimmt. Dies lässt sich daran erkennen, dass die Poisson-Gleichung entsprechend umgestellt werden kann, um die genannte Form von Diagrammen zu beschreiben,

$$p(V) = \frac{\text{const.}}{V^\gamma}$$

Daher ergibt sich der Name „Adiabatexponent“ für γ . Eine Herleitung von Gl. 7 befindet sich im Anhang in Abschnitt [9.1.2].

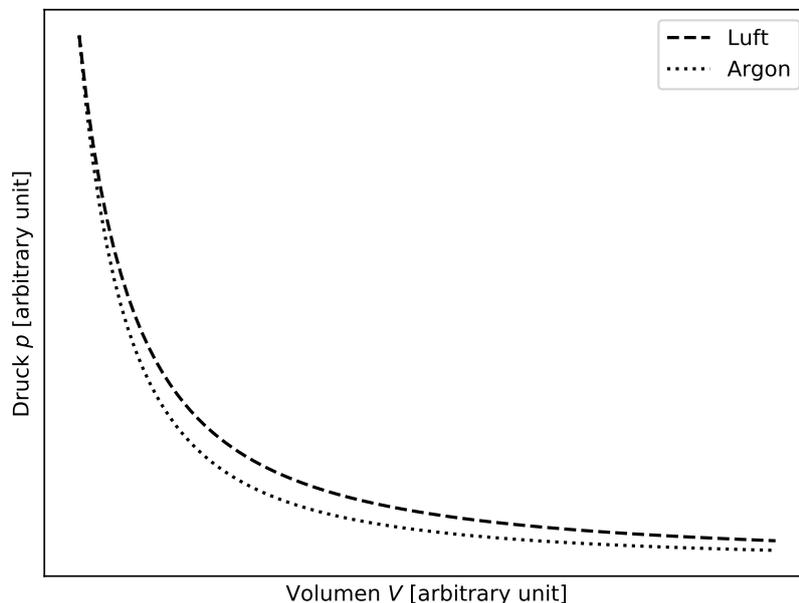


Abbildung 1: Beispiele für Adiabaten von Luft & Argon im p - V -Diagramm. Die Kurven entsprechen den gleichen Parametern und unterscheiden sich nur im Adiabatexponenten.

2.3 Allgemeine Versuchsfragen

Nutzen Sie zum Ausfüllen der Fragen hier auch die folgenden Abschnitte der Anleitung und je nach Bedarf weitere Quellen. Beachten Sie bitte weiterhin, dass die Größe der Lücken bewusst gewählt wurden und Sie sich im Umfang der Beantwortung möglichst daran orientieren. Hinweise zu Rechnungen finden Sie im Anhang.

Was genau messen Sie nach der Methode von N. Clément-Desormes während der Versuchsdurchführung? _____

Was müssen Sie vor der Messung von h_2 beachten, also was muss vor dieser Messung gegeben sein? _____

Was genau messen Sie nach der Methode von E. Rüchardt während der Versuchsdurchführung? _____

Welche drei Drücke wirken auf den Metallzylinder? Welchen Druck lesen Sie am im Raum befindlichen Barometer ab? _____

Welche Größe wollen Sie effektiv mit beiden Versuchsaufbauten bestimmen? Welche Zustandsänderung muss dafür in den Aufbauten stattfinden? _____

Wie lautet der Umrechnungsfaktor zwischen den Einheiten mbar & hPa? Geben Sie auch den Faktor zwischen mbar & Pa an, da diese Umrechnung später Teil der Auswertung ist.

$$1 \text{ mbar} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ hPa}$$

$$1 \text{ mbar} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ Pa}$$

3 Versuchsaufbau und -beschreibung

3.1 Versuchsaufbau nach Nicolas Clément-Desormes

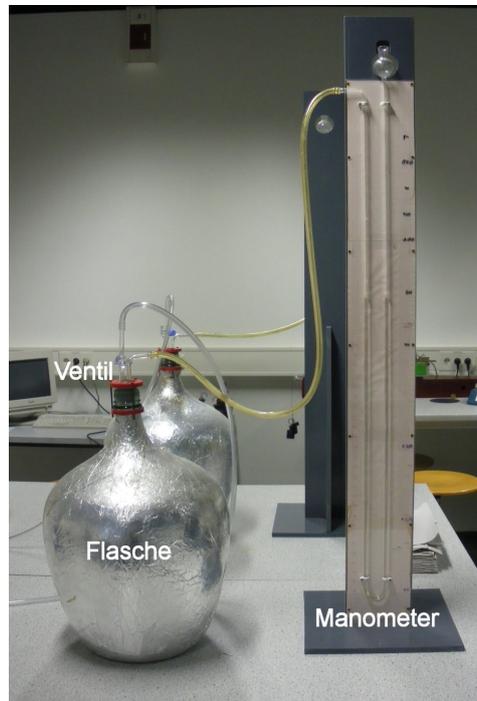


Abbildung 2: Foto des Versuchsaufbaus zur Bestimmung von γ nach Clément-Desormes.

Ein Flüssigkeitsmanometer ist an eine Flasche mit einem großen Volumen angeschlossen. Über ein Ventil kann die Flasche mit Druckluft gefüllt oder zur Druckminderung mit dem Außenraum verbunden werden. Wird über dieses Ventil schnell etwas Druck aus der Flasche abgelassen, so sinkt durch die Expansion zunächst die Temperatur in der Flasche.

Nach genügend Zeit gleicht sich diese aber wieder der Raumtemperatur an, wobei sich der Druck des Gases ein wenig erhöht. Eine genaue Betrachtung der verschiedenen Zustandsänderungen in diesem Prozess zeigt, dass die Drücke vor und nach dem Öffnen des Ventils und nach dem Erreichen des thermischen Gleichgewichts über den Adiabatenexponenten verknüpft sind (vgl. Gl. 20). Im vorliegenden Versuch werden die benötigten Druckdifferenzen mit Hilfe der Höhe der Wassersäule im angeschlossenen Flüssigkeitsmanometer, einem U-Rohr-Manometer, bestimmt.

3.2 Versuchsaufbau nach Eduard Rüchardt

Auf einer Flasche befindet sich ein Präzisionsrohr, in welches ein kleiner Metallzylinder eingepasst ist. Über einen Schlauch kann die Flasche entweder mit Argon oder mit Luft befüllt werden. Der Luftstrom versetzt den Zylinder in Schwingung, sodass er während des Versuchs im Glasrohr auf und ab schwingt. Die Periodendauer dieser Schwingung ist bestimmt durch die Masse des Zylinders, die Abmessungen der Flasche und des Glasrohrs, sowie den

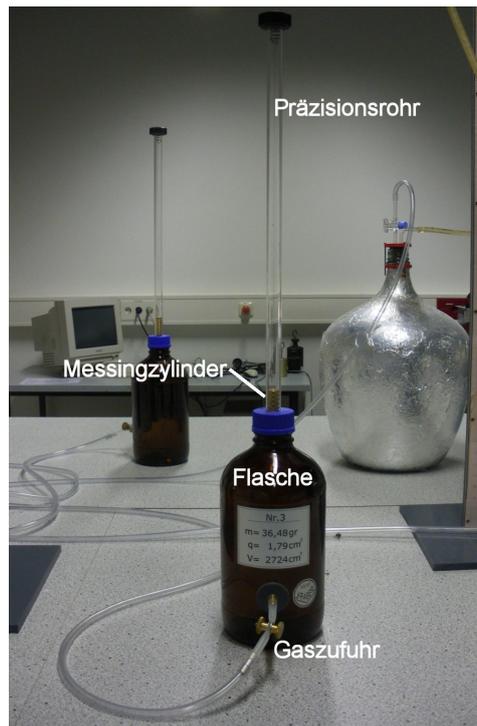


Abbildung 3: Foto des Versuchsaufbaus zur Bestimmung von γ nach E. Rüchardt.

Adiabatexponenten des eingefüllten Gases (vgl. Gl. 25). Sind die übrigen Größen bekannt, lässt sich durch Messung der Schwingungsdauer der Adiabatexponent bestimmen.

Idealerweise sollte der Zylinder das Rohr vollkommen dicht abschließen und gleichzeitig reibungsfrei in dem Glasrohr schwingen. Diese Bedingungen schließen sich in der Realität jedoch gegenseitig aus. Es entweicht ständig Gas aus dem System und Reibungskräfte dämpfen die Schwingung des Zylinders. Dem wird entgegengewirkt, indem ständig eine geringe Menge Gas zugeführt wird und ein kleines Loch in Höhe der Ruhelage des Zylinders im Glasrohr angebracht ist. Der Zustrom des Gases gleicht die entweichende Gasmenge aus. Das Überdruckloch wird bei jeder Schwingung des Zylinders periodisch geöffnet und geschlossen, was für eine phasengerechte Beschleunigung des Zylinders sorgt. Der Aufbau erlaubt es also die Dämpfung in Form eines rückgekoppelten, selbsterregenden Schwingensystems auszuschalten. Dies führt allerdings dazu, dass die Anregungskräfte weniger harmonisch sind als in der Herleitung von Gl. 10 angenommen. Auch die Stärke der Gaszufuhr beeinflusst die Schwingungsfrequenz des Systems. Dieser Einfluss ist aber vernachlässigbar.

4 Benötigte Formeln

4.1 Bestimmung des Adiabatenexponenten nach Clément-Desormes

Der Adiabatenexponent γ setzt sich zusammen aus den Höhen der rechten Wassersäule in verschiedenen Zuständen h_n :

$$\gamma = \frac{h_0 - h_1}{h_0 - h_2} \quad (8)$$

Dabei ist h_0 die Höhe der rechten Wassersäule vor dem Öffnen des Ventils, also in einem Zustand thermischen Gleichgewichts, h_1 die mittlere Höhe direkt nach dem Öffnen des Ventils und h_2 wenn sich nach dem Öffnen des Ventils erneut ein thermisches Gleichgewicht eingestellt hat.

Da alle drei Größen fehlerbehaftet sind ergibt sich hier für den Fehler des Adiabatenexponenten:

$$\Delta\gamma = \sqrt{\left(\frac{h_1 - h_2}{(h_0 - h_2)^2} \Delta h_0\right)^2 + \left(\frac{1}{h_2 - h_0} \Delta h_1\right)^2 + \left(\frac{h_0 - h_1}{(h_0 - h_2)^2} \Delta h_2\right)^2} \quad (9)$$

4.2 Bestimmung des Adiabatenexponenten nach Rüchardt

Der Adiabatenexponent γ setzt sich zusammen aus der Masse m des schwingenden Zylinders, dem Volumen V_0 der Flasche wenn sich der Zylinder in der Ruhelage befindet, der Querschnittsfläche q des Zylinders, dem Ruhelagen-Druck p_0 auf das Gas in der Flasche und der Periodendauer T einer Schwingung:

$$\gamma = \frac{4\pi^2 m V_0}{q^2 p_0 T^2} \quad (10)$$

Der Druck auf das Gas in der Flasche, während sich der Zylinder in der Ruhelage befindet, ist bestimmt durch den Außendruck p_a und den Druck, der durch das Gewicht des Zylinders erzeugt wird, also $p_0 = p_a + \frac{mg}{q}$. Nutzen Sie für die Erdbeschleunigung g den ortsbezogenen Wert für Köln $g_k \approx 9,8111 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Die Werte für m , V_0 und q sind am jeweiligen Versuchsaufbau vorgegeben und werden als fehlerfrei betrachtet. Die Fehlerformel des Adiabatenexponenten lautet dann hier:

$$\Delta\gamma = \gamma \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta p_0}{p_0}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta T}{T}\right)^2} \quad (11)$$

Die Herleitung der beiden Fehlerformeln (Gl. 9 und 11) ist Teil der Auswertung und findet sich später in Abschnitt [6] wieder.

5 Durchführung (im Praktikum)

(Sicherheits-)Hinweise:

In diesem Versuch werden Druckgase verwendet. Verstellen Sie niemals selbst die Ventile an der Wand oder an der Argonflasche, darum kümmert sich Ihre Versuchsassistenz. Führen Sie den Gaswechsel zwischen Luft und Argon bei dem Aufbau nach Rüchardt keinesfalls selbst durch, sondern lassen Sie die Versuchsassistenz auch dies übernehmen. Gleiches gilt für die Druckluftversorgung der beiden Versuchsteile.

Die Druckklemmen dürfen während der Messungen nicht verstellt werden, da die Aufbauten untereinander verbunden sind und sich gegenseitig beeinflussen. Warten Sie also bis alle Aufbauten für die Messung bereit sind und beginnen Sie erst dann Ihre eigenen Messungen.

Vermeiden Sie den Tisch zu erschüttern, da dies die Schwingungen des Zylinders beeinflusst. Am besten Sie berühren den Tisch während der Messungen nicht.

Beachten Sie außerdem weitere Sicherheitshinweise die in der Anleitung dargelegt sind.

Machen Sie sich vor Beginn der Messungen mit den Versuchsaufbauten vertraut. Es empfiehlt sich, kurze Testmessungen durchzuführen, um spätere Abläufe zu beherrschen. Eine bewährte Methode, um Zeit zu sparen, ist, die längeren Wartezeiten zwischen Messungen im Aufbau nach Clément-Desormes mit den verhältnismäßig kurzen Messzeiten im Aufbau nach Rüchardt zu verbinden. Dazu fangen Sie an, sich zuerst mit dem Aufbau nach Clément-Desormes vertraut zu machen und erste Probemessungen ohne lange Wartezeiten durchzuführen.

Wenn Sie sich sicher fühlen, die Messungen später wie vorgesehen durchführen zu können, nutzen Sie das Ventil an den großen Flaschen, um vorsichtig den Druck am U-Rohr-Manometer zu erhöhen, bis die maximale Anzeigehöhe auf der rechten Seite erreicht wurde⁷. Beachten Sie, dass sich die Höhe besonders anfangs noch sehr schnell ändert, da die Kompression der Luft in der Flasche die Temperatur erhöht hat und diese nun vorerst schnell abkühlt. Justieren Sie die Wasserhöhe deshalb in den ersten Sekunden entsprechend nach. Dann müssen Sie mindestens zehn Minuten warten, damit sich die Temperatur wieder an die Umgebung angleichen kann.

Nutzen Sie diese Wartezeit, um sich mit dem Aufbau nach Rüchardt vertraut zu machen und gegebenenfalls die Messungen für das erste Gas durchzuführen. Wenn die zehn Minuten von zuvor vergangen sind, können Sie die ersten Werte am Aufbau nach Clément-Desormes messen. Während der nächsten Wartezeit wiederholen Sie die Messungen am Aufbau nach Rüchardt, jedoch für das andere Gas.

⁷Bei normalem Füllstand des U-Rohr-Manometers können Sie auf der rechten Seite problemlos eine Höhe knapp unterhalb des kugelförmigen Bereichs einstellen, wobei diese Höhe noch an der Skala ablesbar sein muss. Beachten Sie dabei jedoch, dass sich der Flüssigkeitsspiegel auf der linken Seite nicht in den unteren, gebogenen Bereich des Manometers und insbesondere nicht zu dessen tiefsten Punkt bewegt, da die Flüssigkeit dann oben heraus spritzen würde. Dies könnte passieren, falls nicht genügend Flüssigkeit enthalten sein sollte. Informieren Sie in diesem Fall Ihre Versuchsassistenz und stellen Sie den Anfangszustand gegebenenfalls in Abhängigkeit der linken Seite des Manometers ein, sodass der Flüssigkeitsspiegel dort möglichst tief, also knapp oberhalb der Krümmung, liegt.

5.1 Methode nach Nicolas Clément-Desormes

Dieser Versuchsteil wird nur mit Luft durchgeführt.

Warten Sie, bis sich der Versuchsaufbau im thermischen Gleichgewicht befindet, das heißt bis die Höhe h_0 der Wassersäule konstant ist (s. o.). Notieren Sie diesen Wert als den ersten Wert für h_0 in Tabelle 1.

Führen Sie die folgenden Messungen fünfmal durch:

- Öffnen Sie kurzzeitig das Ventil, sodass die Höhe der Wassersäule um etwa 2–3 cm absinkt. *Öffnen Sie das Ventil zügig aber vorsichtig, sodass der Aufbau nicht beschädigt wird.*
Je nachdem wie viel Wasser sich im Flüssigkeitsmanometer befindet und wie hoch Sie die rechte Wassersäule anfangs eingestellt haben, ist auch ein Absenken um etwas mehr als die genannten 2–3 cm möglich.
- Nach dem Schließen des Ventils schwingt die Wasserhöhe einige Male. Lesen Sie das erste Minimum (h_1^{\min}) und Maximum (h_1^{\max}) dieser Schwingung ab.
- Warten Sie bis sich der Versuchsaufbau im thermischen Gleichgewicht befindet, das heißt bis die Höhe h_2 der Wassersäule konstant ist. Dieser Vorgang dauert einige Minuten. Notieren Sie h_2 . Dieser Wert dient als h_0 der nächsten Messung.

Tabelle 1 muss am Ende der Messungen komplett ausgefüllt sein.

Messung	h_0 [mm]	h_1^{\min} [mm]	h_1^{\max} [mm]	h_2 [mm]
1				
2				
3				
4				
5				
$\Delta h_0 = \Delta h_2$ [mm]		$\Delta h_1^{\min} = \Delta h_1^{\max}$ [mm]		

Tabelle 1: Messwerte für den Aufbau nach Clément-Desormes.

5.2 Methode nach Eduard Rüchardt

Messen Sie den Luftdruck im Raum p_a am digitalen Barometer, welches sich an der Wand nahe dem Sicherungskasten, rechts neben dem Versuch „gekoppeltes Pendel“, befindet. Obwohl exakte Druckmessungen schwierig sind, zeigt das digitale Barometer zumindest scheinbar sehr genaue Werte an. Für eine realistische Fehlerabschätzung wählen Sie daher eine deutlich größere Messungenauigkeit, als die Genauigkeit der Anzeige des Barometers (bspw. im

Bereich von ca. 1 – 2 hPa).

Führen Sie die folgenden Messungen für Luft und für Argon durch:

- Regulieren Sie an der Druckklemme den Zustrom in die Flasche so, dass der Zylinder möglichst symmetrisch um das Überdruckloch im Glasrohr schwingt. Bedenken Sie, dass sich die Aufbauten untereinander beeinflussen und Veränderungen an einem anderen Aufbau auch Ihren Aufbau beeinflussen.
- Messen Sie je fünfmal die Zeit für 50 Schwingungen mit einer Stoppuhr und notieren Sie die Messwerte.

Tabelle 2 muss am Ende Ihrer Messungen komplett ausgefüllt sein. Notieren Sie dafür die Werte von m , V_0 und q die für Ihren Aufbau vorgegeben sind. Hinweise zum Start-Stopp-Fehler finden Sie im Anhang in Abschnitt [9.2.2]. Schätzen Sie einen für Ihre Messung passenden Wert Δt_S ab und notieren Sie Ihren entsprechenden Wert von Δt .

Messung i	Luft — 50 Schwingungen	Argon — 50 Schwingungen	
	$t_{i,\text{Luft}}$ [s]	$t_{i,\text{Argon}}$ [s]	
1			
2			
3			
4			
5			
Start-Stopp-Fehler	Δt [s]		
Masse Zylinder	m [g]		
Querschnittsfläche	q [cm ²]		
Flaschenvolumen	V [cm ³]		
Außendruck	p_a [mbar]		±

Tabelle 2: Messwerte für den Aufbau nach Rüchardt.

AT: _____
 (Datum) (Unterschrift Versuchsassistenz)

6 Auswertung (zu Hause)

In diesem Abschnitt werten Sie Ihre Messwerte aus. Folgen Sie dazu den nachfolgenden Anweisungen und füllen Sie die entsprechenden Stellen aus. Allgemeine Hinweise zu den hier benötigten Fehlerrechnungen finden Sie auch im Anhang in Abschnitt [9.2]. Beachten Sie die korrekte Angabe von Ergebnissen, wozu das Runden bis auf signifikante Stellen zählt.

6.1 Bestimmung des Adiabatenexponenten nach Clément-Desormes

Zuerst gilt es aus den Messwerten h_1^{\min} und h_1^{\max} den benötigten Wert $h_1 = \frac{h_1^{\min} + h_1^{\max}}{2}$ zu bestimmen⁸. Da h_1^{\min} und h_1^{\max} die gleiche Ungenauigkeit besitzen, kann diese vereinheitlicht als $\Delta h_1^m := \Delta h_1^{\max} = \Delta h_1^{\min}$ bezeichnet werden. Beweisen Sie, dass sich dafür per Gaußscher Fehlerfortpflanzung $\Delta h_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \Delta h_1^m = \frac{\Delta h_1^m}{\sqrt{2}}$ ergibt.

Füllen Sie mit diesem Wissen Tabelle 3 aus.

Messung i	h_1 [mm]	Δh_1 [mm]
1		
2		
3		
4		
5		

Tabelle 3: Werte von $h_1 \pm \Delta h_1$.

⁸Beachten Sie, obwohl die Formel für h_1 der eines Mittelwerts entspricht, handelt es sich effektiv nicht um einen Mittelwert im klassischen Sinn. Würden Sie in diesem Fall die Standardabweichung des Mittelwerts anwenden, würden größere Schwingungen einen größeren Fehler besitzen und somit später bei der Bildung des gewichteten Mittelwerts weniger Berücksichtigung finden. Zu kleine Schwingungen sind in der Anwendung jedoch oft ungenauer als größere, sodass es Sinn ergibt den Wert von Δh_1 per Gaußscher Fehlerfortpflanzung zu bestimmen.

Zuvor haben Sie bereits die Gleichung zur Bestimmung von γ für die Methode von Clément-Desormes kennengelernt, $\gamma = \frac{h_0 - h_1}{h_0 - h_2}$ (Gl. 8), sowie auch die dazugehörige Fehlerformel (Gl. 9). Die Zwischenschritte der Herleitung dieser Fehlerformel werden im Folgenden bestimmt:

$$\Delta\gamma = \sqrt{\left(\frac{\partial\gamma}{\partial h_0}\Delta h_0\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial h_1}\Delta h_1\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial h_2}\Delta h_2\right)^2}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial h_0} = \underline{\hspace{15cm}}$$

$$= \underline{\hspace{15cm}}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial h_1} = \underline{\hspace{15cm}}$$

$$= \underline{\hspace{15cm}}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial h_2} = \underline{\hspace{15cm}}$$

$$= \underline{\hspace{15cm}}$$

$$\Rightarrow \Delta\gamma = \underline{\hspace{15cm}}$$

Im letzten Schritt sollten Sie Gl. 9 erhalten haben. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis anhand dieser Formel. Nutzen Sie Ihre Messwerte und die Werte aus Tabelle 3, um mit Gl. 8 und Gl. 9, Tabelle 4 auszufüllen.

Messung i	γ_i	$\Delta\gamma_i$
1		
2		
3		
4		
5		

Tabelle 4: Werte von $\gamma_i \pm \Delta\gamma_i$.

Im Anhang in Abschnitt [9.2.4] ist das prinzipielle Vorgehen zur Bestimmung eines gewichteten Mittelwerts vorgegeben. Wenden Sie dieses Verfahren auf die hier vorliegenden Werte $\gamma_i \pm \Delta\gamma_i$ an und füllen Sie entsprechend Tabelle 5 aus.

Durch Übertragung der Formeln für die Wichtungsfaktoren und den gewichteten Mittelwert

auf die Werte in diesem Versuchsteil ergeben sich hier die Formeln:

$$w_i = \underline{\hspace{10em}} \quad \& \quad \bar{\gamma}_{\text{gewichtet}} = \underline{\hspace{10em}}.$$

Messung i	Wichtungsfaktor w_i	$\gamma_i \cdot w_i$
1		
2		
3		
4		
5		
$\bar{\gamma}_{\text{gewichtet}}$	$\Delta\bar{\gamma}_{\text{intern}}$	$\Delta\bar{\gamma}_{\text{extern}}$

Tabelle 5: Werte der Wichtungsfaktoren, sowie das Produkt dieser mit dem jeweiligen Wert von γ und schließlich der gewichtete Mittelwert mit dazugehörigen Fehlern.

Unter Verwendung des größeren Fehlerwerts ergibt sich also als Adiabatenexponent für Luft nach der Methode von Nicolas Clément-Desormes:

$$\gamma_{\text{Luft}} = \underline{\hspace{10em}} \pm \underline{\hspace{10em}}$$

6.2 Bestimmung des Adiabatenexponenten nach Rüchardt

Zunächst gilt es aus den gemessenen Zeiten t_i die Dauer einer einzelnen Schwingung zu bestimmen. Für n abgezählte Schwingungen ergibt sich aus der Gesamtzeit t_i die Dauer einer Schwingung T_i durch

$$T_i = \underline{\hspace{10em}}$$

Die Verwendung von Gaußscher Fehlerfortpflanzung zeigt, wie sich die ΔT_i aus der Messungengenauigkeit Δt der Werte t_i ergeben:

$$\Delta T_i = \sqrt{\left(\underline{\hspace{10em}} \right)^2}$$

$$= \left| \underline{\hspace{10em}} \right|$$

Da Δt positiv ist, sind die Betragsstriche effektiv nicht notwendig. Nutzen Sie die Werte von $t_{i,\text{Luft}} \pm \Delta t$ und $t_{i,\text{Argon}} \pm \Delta t$ um Tabelle 6 auszufüllen. Da die Werte ΔT_i für alle Messungen gleich sind, reicht es den Wert einmal auszurechnen.

Messung i	$T_{i,\text{Luft}}$ [s]	$T_{i,\text{Argon}}$ [s]
1		
2		
3		
4		
5		
		$\Delta T_{i,\text{Luft}} = \Delta T_{i,\text{Argon}}$ [s]

Tabelle 6: Einzelne Schwingungsdauern für Luft und Argon, inkl. deren Ungenauigkeiten.

Bestimmen Sie jeweils für Luft und für Argon aus den Werten T_i die mittlere Schwingungsdauer $\bar{T} \pm \Delta\bar{T}$. Hinweise zur Berechnung des Mittelwerts finden Sie im Anhang in Abschnitt [9.2.3]. Übertragen Sie zunächst die Formeln des Mittelwerts und dessen Standardabweichung auf die hier vorliegenden Größen und berechnen Sie danach die Werte.

Formeln:

$$\bar{T} = \underline{\hspace{15cm}}$$

$$\Delta\bar{T} = \underline{\hspace{15cm}}$$

Werte:

$$\bar{T}_{\text{Luft}} = (\underline{\hspace{4cm}} \pm \underline{\hspace{4cm}}) \text{ s}$$

$$\bar{T}_{\text{Argon}} = (\underline{\hspace{4cm}} \pm \underline{\hspace{4cm}}) \text{ s}$$

Um letztendlich Gl. 10 anwenden zu können, muss $p_0 \pm \Delta p_0$ bekannt sein, also müssen diese Werte erst berechnet werden. Es gilt $p_0 = p_a + \frac{mg}{q}$. Für die Berechnung von p_0 , sowie auch später für γ , ist es sinnvoll die Einheiten benötigter Größen zuvor anzupassen, damit sich diese einfach verrechnen lassen.

Füllen Sie Tabelle 7 entsprechend der vorgegebenen Einheiten aus. Die linke Hälfte der Tabelle entnehmen Sie bitte Ihrem Messprotokoll, da die dortigen Einheiten denen aus dem Protokoll entsprechen sollten.

m [g]		m [kg]	
q [cm ²]		q [m ²]	
V [cm ³]		V [m ³]	
p_a [mbar]		p_a [Pa]	
Δp_a [mbar]		Δp_a [Pa]	
		g_k [$\frac{m}{s^2}$]	9,8111

Tabelle 7: Einheitenumrechnung weiter verwendeter Größen in SI-Einheiten.

Ergänzen Sie fehlende Rechenschritte in der Herleitung der Formel von Δp_0 und berechnen Sie danach die Werte $p_0 \pm \Delta p_0$. Beachten Sie bei der Rechnung die richtigen Einheiten.

$$\begin{aligned} \Delta p_0 &= \sqrt{\left(\right)^2} \\ &= \\ &= \Delta p_a \\ \Rightarrow p_0 &= \left(\pm \right) \text{Pa} \end{aligned}$$

Nun sollten alle Werte zur Bestimmung von $\gamma \pm \Delta\gamma$ vorliegen.

Die Formel für $\Delta\gamma$ wurde bereits vorgegeben, siehe Gl. 11. Ergänzen Sie die Zwischenschritte der Herleitung dieser Formel entsprechend den Vorgaben. Das Schema ist ähnlich zur Herleitung von Δp_a nach der Methode von Clément-Desormes in Abschnitt [6.1].

Es gilt $\gamma = \gamma(p_0, T)$.

$$\Rightarrow \Delta\gamma = \underline{\hspace{15cm}}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial p_0} = \underline{\hspace{15cm}}$$

$$= \underline{\hspace{15cm}}$$

$$= \gamma \cdot \underline{\hspace{15cm}}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial T} = \underline{\hspace{15cm}}$$

$$= \underline{\hspace{15cm}}$$

$$= \gamma \cdot \underline{\hspace{15cm}}$$

$$\Rightarrow \Delta\gamma = \underline{\hspace{15cm}}$$

Berechnen Sie nun die Werte von $\gamma \pm \Delta\gamma$ für Luft und Argon.

$$\gamma_{\text{Luft}} = \underline{\hspace{10cm}} \pm \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\gamma_{\text{Argon}} = \underline{\hspace{10cm}} \pm \underline{\hspace{10cm}}$$

8 Quellen und weiterführende Literatur

- Fehlerrechnung und allgemeine Hinweise:
<https://www.astro.uni-koeln.de/AP/>
- Meschede, Gerthsen Physik, Springer Berlin Heidelberg, 25. Aufl. 2015. Neuaufl. 2015
<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-45977-5>
[Zugang aus dem Netz der Uni Köln (UKLAN) möglich]
- Bergmann und Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 1, “Mechanik, Akustik, Wärme”, Boston: De Gruyter, 9., verb. Aufl. Reprint 2018
<https://doi.org/10.1515/9783111628882>
[Zugang aus dem Netz der Uni Köln (UKLAN) möglich]
- Halliday: Physik, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 3. Auflage, 2018
<https://ebookcentral.proquest.com/lib/ubkoeln/detail.action?docID=5085141>
[Zugang aus dem Netz der Uni Köln (UKLAN) oder mit entsprechenden Zugangsdaten möglich]
- <https://physics.stackexchange.com/>

Feedback

Hier ist nach Ihrem Feedback zu dieser Anleitung gefragt. Gibt es etwas, das Sie an der Versuchsanleitung inhaltlich oder technisch ändern würden? Ist beispielsweise etwas nicht oder unzureichend erklärt, Lücken zu klein, etc.? Änderungsvorschläge könnten zeitnah umgesetzt werden.

9 Anhang

9.1 Weiterführende Anmerkungen zum theoretischen Hintergrundwissen

9.1.1 Herleitung — Adiabatenexponent in Abhängigkeit der Freiheitsgrade

Wir betrachten eine Gasmenge, die einmal bei konstantem Volumen (isochor) und einmal bei konstantem Druck (isobar) erwärmt werden soll. Für jeden dieser beiden Prozesse können wir eine Wärmekapazität berechnen, welche angibt wie viel Energie wir dem Gas für eine bestimmte Temperaturerhöhung zuführen müssen. Um die Wärmekapazitäten zu unterscheiden, bezeichnen wir sie im isochoren Fall mit C_V und im isobaren Fall mit C_p .

Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik lautet $dQ = dU - dW$ wenn er mit Hilfe von Differenzialen dargestellt wird⁹, wobei dQ die dem System zugeführte Wärme ist, dU die resultierende Änderung der inneren Energie und $dW = -p dV$ die während der Zustandsänderung vom System geleistete (Volumen-)Arbeit. Dabei ist p der Druck und V das Volumen des Gases.

Unter Verwendung des Äquipartitionsgesetzes ergibt sich für die innere Energie U eines Gases mit f Freiheitsgraden, der Temperatur T und der Teilchenzahl N :

$$\begin{aligned} U &= \frac{f}{2} N k_B T & \left| N k_B = nR \right. \\ &= \frac{f}{2} nRT. \end{aligned}$$

Bei der Überführung in die von der Stoffmenge n abhängige Form wurden die gleichen Identitäten benutzt, wie schon beim idealen Gasgesetz (Gl. 2).

Analog zur obigen Betrachtung lässt sich die Wärmekapazität auch mit Differenzialen ausdrücken. Zusammen mit den vorigen Annahmen ergibt sich für die Wärmekapazität bei konstantem Volumen:

$$\begin{aligned} C_V &= \left. \frac{dQ}{dT} \right|_V = \left. \frac{dU}{dT} \right|_V - \left. \frac{dW}{dT} \right|_V = \left. \frac{dU}{dT} \right|_V + p \left. \frac{dV}{dT} \right|_V \\ &= \left. \frac{d}{dT} \left(\frac{f}{2} nRT \right) \right|_V + 0 \\ &= \frac{f}{2} nR. \end{aligned}$$

Der Volumen-Term fällt weg, da das Volumen hier konstant ist. Für den Fall der isobaren Erwärmung fällt dieser Term entsprechend nicht weg und muss beachtet werden. Dafür nutzen wir das ideale Gasgesetz $pV = nRT \Leftrightarrow V = \frac{1}{p} nRT$. Folglich gilt für die Wärmekapazität

⁹Streng genommen gilt $dU = \delta Q + \delta W$. In vielen Lehrbüchern, so wie auch hier, wird der Satz jedoch vereinfacht dargestellt, meist sogar in Form von Differenzen, wie in der Vorbereitung dieser Anleitung, anstelle von vollständigen und unvollständigen Differenzialen.

bei konstantem Druck:

$$\begin{aligned}
 C_p &= \left. \frac{dQ}{dT} \right|_p = \left. \frac{dU}{dT} \right|_p + p \left. \frac{dV}{dT} \right|_p \\
 &= \frac{f}{2} nR + p \left. \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{p} nRT \right) \right|_p \\
 &= \frac{f}{2} nR + nR \\
 &= \left(\frac{f}{2} + 1 \right) nR.
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich schließlich:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{f+2}{f}.$$

9.1.2 Herleitung — Poisson-Gleichung

Wir beginnen mit sehr ähnlichen Annahmen wie in Abschnitt [9.1.1], allerdings beschreibt die Poisson-Gleichung adiabatische Zustandsänderungen, sodass $dQ = 0$ gilt. Erneut verwenden wir den 1. Hauptsatz der Thermodynamik, sowie andere Gegebenheiten wie zuvor:

$$\begin{aligned}
 dQ = 0 \quad \Rightarrow \quad dU &= dW \\
 \frac{f}{2} nR dT &= -p dV. \tag{12}
 \end{aligned}$$

Gleichung 12 hängt noch von allen drei Zustandsgrößen der idealen Gasgleichung ab, während die Poisson-Gleichung traditionell nur mit Hilfe des Drucks p und des Volumens V dargestellt wird. Wir nutzen also die ideale Gasgleichung (Gl. 2) um dT durch die anderen beiden Zustandsgrößen auszudrücken:

$$pV = nRT \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{1}{nR} pV \quad \Rightarrow \quad dT = \frac{1}{nR} d(pV) = \frac{1}{nR} (p dV + V dp).$$

Setzen wir diesen Ausdruck für dT in Gl. 12 ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \frac{f}{2} (p dV + V dp) &= -p dV \\
 \Leftrightarrow \quad \left(\frac{f}{2} + 1 \right) p dV &= -\frac{f}{2} V dp \\
 \Leftrightarrow \quad \left(\frac{f+2}{f} \right) \frac{dV}{V} &= -\frac{dp}{p}.
 \end{aligned}$$

An dieser Stelle ist einerseits der Adiabatenexponent γ leicht erkennbar, andererseits sind die Variablen p und V jeweils auf eine Seite sortiert, sodass Integration möglich ist:

$$\begin{aligned} \gamma \int_{V_0}^V \frac{dV'}{V'} &= - \int_{p_0}^p \frac{dp'}{p'} \\ \Leftrightarrow \gamma (\ln(V) - \ln(V_0)) &= - (\ln(p) - \ln(p_0)) \\ \Leftrightarrow \ln\left(\frac{V^\gamma}{V_0^\gamma}\right) &= \ln\left(\frac{p_0}{p}\right) \\ \Leftrightarrow pV^\gamma &= p_0V_0^\gamma \\ \Leftrightarrow pV^\gamma &= \text{const.} \end{aligned}$$

Dies entspricht der wohl bekanntesten Form der Poisson-Gleichung, welche jedoch nur eine von mehreren Möglichkeiten ist. Mit dem idealen Gasgesetz lässt sich beispielsweise das Volumen V in Abhängigkeit vom Druck p und der Temperatur T beschreiben. Wird dieser Ausdruck in die Gleichung oben eingesetzt, ergibt sich die Poisson-Gleichung in Abhängigkeit vom Druck p und der Temperatur T :

$$\frac{T^\gamma}{p^{\gamma-1}} = \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad \frac{p^{\gamma-1}}{T^\gamma} = \text{const.} \quad (13)$$

9.1.3 Methode nach N. Clément-Desormes

Abbildung 4 zeigt eine schematische Darstellung des Versuchsaufbaus. Das Flüssigkeitsmanometer besteht aus einem U-Rohr mit Querschnittsfläche q , welches mit Wasser gefüllt ist. Auf die linke Seite wirkt der Innendruck der Flasche p_i , auf die rechte Seite der Außendruck p_a . Entsprechend dem Unterschied von p_i und p_a ergibt sich ein Höhenunterschied Δh der Wassersäulen auf beiden Seiten. Die Gewichtskraft F_G der Wassersäule, welche sich aus dem Höhenunterschied ergibt, gleicht über den Querschnitt des Rohrs den Druckunterschied aus. Es gilt:

$$\begin{aligned} p(\Delta h) &= \frac{F_G}{q} = \frac{mg}{q} \\ &= \frac{\rho q \Delta h g}{q} \\ &= \rho g \Delta h \\ &= \rho g (h_{\text{re}} - h_{\text{li}}). \end{aligned}$$

Dabei ist ρ die Dichte des Wassers, g die Erdbeschleunigung und h_{re} bzw. h_{li} ist die Höhe der Wassersäule auf der rechten bzw. linken Seite. Da sich die Wassermenge nicht ändert, ist die Länge der gesamten Wassersäule konstant und es lässt sich schreiben:

$$\begin{aligned} h_{\text{ges}} &= h_{\text{re}} + h_{\text{li}} \\ \Rightarrow p(\Delta h) &= \rho g (2h_{\text{re}} - h_{\text{ges}}) \\ &=: \tilde{p}(h_{\text{re}}). \end{aligned} \quad (14)$$

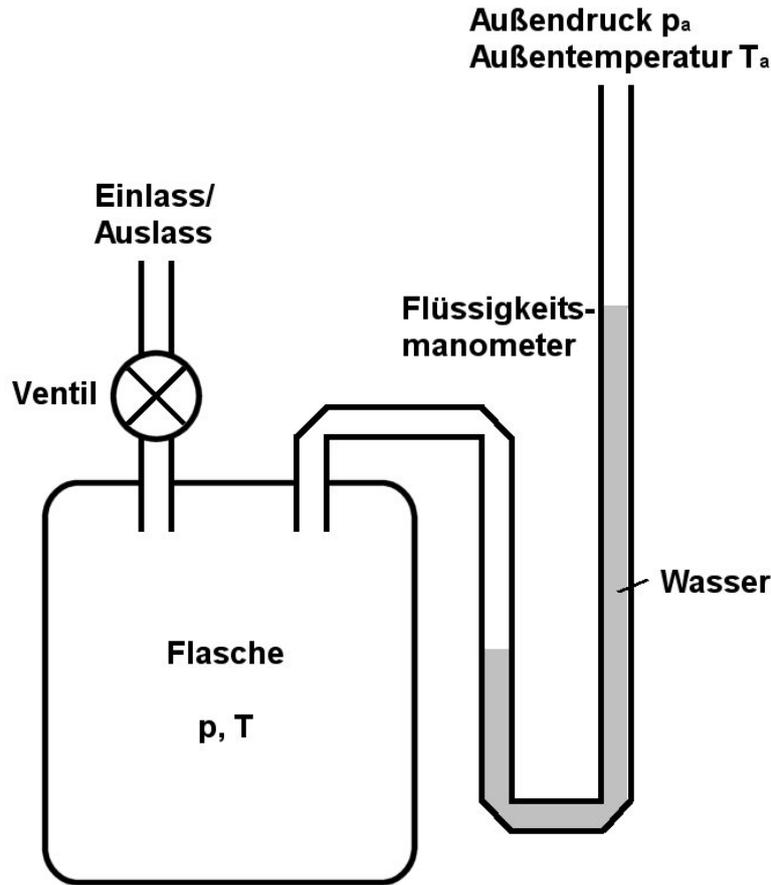


Abbildung 4: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus zur Bestimmung von γ nach Clément-Desormes.

Der Messzyklus besteht aus drei Zuständen, die jeweils durch Druck p_n , Temperatur T_n und Volumen V_n charakterisiert sind ($n = 0, 1, 2$). Sie sind verknüpft durch zwei Zustandsänderungen. Zu Beginn der Messung gilt für das Gas:

$$p_0 = p_a + \tilde{p}(h_0), \quad T_0 = T_a \quad \text{und} \quad V_0 = V. \quad (15)$$

Dabei wird $h_{\text{re},n}$ durch h_n abgekürzt. Bei T_a handelt es sich um die Außentemperatur. Des Weiteren gehen wir davon aus, dass die Volumenänderung zwischen den verschiedenen Zuständen so klein ist, dass für alle Zustände das gleiche Volumen V verwendet werden kann. Nach dem kurzzeitigen Öffnen des Ventils zum Außenraum ist die Wassersäule im rechten Rohr auf die Höhe h_1 abgesunken. Dieser Vorgang entspricht einer adiabatischen Dilatation/Expansion, bei der sich die Temperatur der Luft in der Flasche verringert. Direkt nach dem Schließen gelten daher die neuen Zustandsgrößen:

$$p_1 = p_a + \tilde{p}(h_1), \quad T_1 < T_0 \quad \text{und} \quad V_1 = V. \quad (16)$$

Im Verlauf der Zeit stellt sich erneut ein thermisches Gleichgewicht ein, das heißt die Temperatur erhöht sich wieder auf die Außentemperatur. Im neuen thermischen Gleichgewicht gelten die Zustandsgrößen:

$$p_2 = p_a + \tilde{p}(h_2), \quad T_2 = T_0 = T_a \quad \text{und} \quad V_2 = V. \quad (17)$$

Da sich die Temperatur erhöht gilt $h_2 > h_1$.

Verknüpfung der drei Zustände:

Für eine adiabatische Zustandsänderung gilt das Poisson-Gesetz (vgl. Abschnitt [9.1.2]). Zuvor wurde beschrieben, dass sich die Form $pV^\gamma = \text{const.}$ mit dem idealen Gasgesetz auch in $\frac{p^{\gamma-1}}{T^\gamma} = \text{const.}$ umschreiben lässt. Für die adiabatische Zustandsänderung von (15) nach (16) gilt daher:

$$\begin{aligned} \frac{p_0^{\gamma-1}}{T_0^\gamma} &= \frac{p_1^{\gamma-1}}{T_1^\gamma} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\gamma-1} &= \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^\gamma. \end{aligned} \quad (18)$$

Die Änderung von (16) nach (17) beschreiben wir mit Hilfe der Annahmen von zuvor, insbesondere einem isochoren Übergang ($V = \text{const.}$), welcher durch das ideale Gasgesetz beschrieben ist:

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{T_2} &= \frac{p_1}{T_1} \\ \Leftrightarrow \frac{p_2}{p_1} &= \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_0}{T_1}. \end{aligned}$$

Damit lässt sich Gl. 18 umschreiben zu:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\gamma-1} &= \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\gamma \\ \Leftrightarrow (\gamma-1) \cdot (\log(p_0) - \log(p_1)) &= \gamma \cdot (\log(p_2) - \log(p_1)) \\ \Leftrightarrow \gamma \cdot (\log(p_0) - \log(p_2)) &= \log(p_0) - \log(p_1) \\ \Leftrightarrow \gamma &= \frac{\log(p_0) - \log(p_1)}{\log(p_0) - \log(p_2)} \\ &= \frac{\log(p_a + \tilde{p}(h_0)) - \log(p_a + \tilde{p}(h_1))}{\log(p_a + \tilde{p}(h_0)) - \log(p_a + \tilde{p}(h_2))} \\ &= \frac{\log\left(1 + \frac{\tilde{p}(h_0)}{p_a}\right) - \log\left(1 + \frac{\tilde{p}(h_1)}{p_a}\right)}{\log\left(1 + \frac{\tilde{p}(h_0)}{p_a}\right) - \log\left(1 + \frac{\tilde{p}(h_2)}{p_a}\right)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Um diesen Ausdruck weiter vereinfachen zu können nutzen wir eine Näherung, die Darstellung des Logarithmus-Terms mit Hilfe der Taylorreihe. Im vorliegenden Experiment gilt $\tilde{p}(h_n) \ll p_a$, also ist $\frac{\tilde{p}(h_n)}{p_a}$ ein sehr kleiner Wert nahe 0.

Die Entwicklung von $\log(1+x)$ um $x=0$ in eine Taylorreihe lässt sich hier für eine hinreichende Genauigkeit schon nach dem linearen Term abbrechen:

$$\log(1+x) \approx \log(1) + \left. \frac{1}{1+x} \right|_{x=0} \cdot x = x.$$

Nutzen wir diese Näherung in Gl. 19, so ergibt sich:

$$\gamma = \frac{\frac{\tilde{p}(h_0)}{p_a} - \frac{\tilde{p}(h_1)}{p_a}}{\frac{\tilde{p}(h_0)}{p_a} - \frac{\tilde{p}(h_2)}{p_a}} \quad (20)$$

$$= \frac{h_0 - h_1}{h_0 - h_2}. \quad (21)$$

Im letzten Schritt wurde die Definition aus Gl. 14 verwendet, wobei p_a , ρ , g , h_{ges} und der Faktor 2 wegfallen und effektiv nur noch die $h_{\text{re},n}$ bzw. h_n übrig bleiben.

9.1.4 Methode nach E. Rüchardt

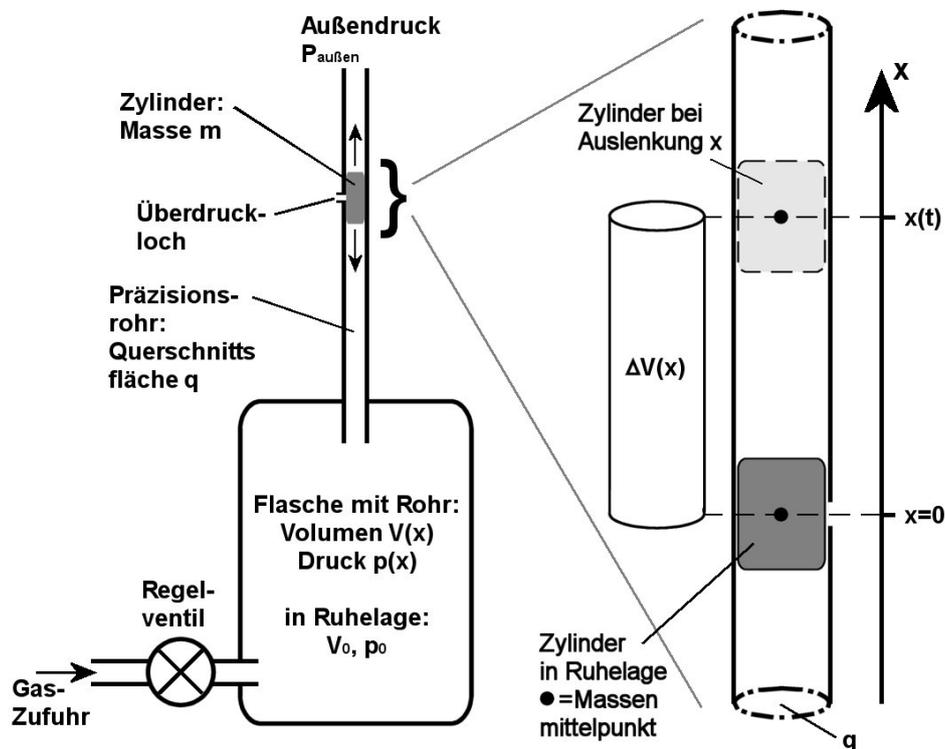


Abbildung 5: links: Schema des Versuchsaufbaus nach der Methode von E. Rüchardt
rechts: Vergrößerung des Rohrausschnitts in der Nähe der Ruhelage

Abbildung 5 zeigt eine schematische Darstellung des verwendeten Versuchsaufbaus. Wir definieren für die folgenden Rechnungen die x -Achse entlang des Rohrs mit aufwärts zeigender positiver Richtung (vgl. mit Vergrößerung rechts in der Abbildung). Auf den Zylinder mit der Querschnittsfläche q wirken die folgenden Kräfte:

- die Kraft durch den Flascheninnendruck $F_i = p_i \cdot q$ (nach oben gerichtet, positiv)
- die Kraft durch den Außendruck $F_a = -p_a \cdot q$ (nach unten gerichtet, negativ)
- die Gewichtskraft des Zylinders $F_G = -m \cdot g$ (nach unten gerichtet, negativ), mit der Masse des Zylinders m und der Erdbeschleunigung g

Entsprechend der Richtung der Kräfte ergibt sich für die Gesamtkraft auf den Zylinder:

$$F_{\text{ges}} = F_i + F_a + F_G = p_i \cdot q - p_a \cdot q - m \cdot g. \quad (22)$$

Der Innendruck in der Flasche und entsprechend die Kraft auf den Zylinder verändern sich, wenn der Zylinder aus seiner Ruhelage ausgelenkt wird, da sich dadurch das Flaschenvolumen ändert. Wird der Zylinder aus dieser Lage losgelassen, führt er Schwingungen um seine Ruhelage aus. Die Zustandsänderungen während dieser Schwingungen sind schnell genug, um als adiabatisch betrachtet zu werden, sodass das Poisson-Gesetz gilt, $pV^\gamma = \text{const}$.

Befindet sich der Zylinder an der Position x , so können wir einen entsprechenden Druck $p_i(x)$ und ein entsprechendes Volumen $V(x)$ zuordnen. Der Einfachheit halber nutzen wir im Folgenden $p(x)$ an Stelle von $p_i(x)$.

Die Ruhelage ist an der Stelle $x = 0$ definiert, sodass wir entsprechende Werte $p(x = 0) = p_0$ und $V(x = 0) = V_0$ erhalten. Es gilt:

$$p(x) \cdot V(x)^\gamma = p_0 \cdot V_0^\gamma. \quad (23)$$

In der Ruhelage muss per Definition ein Kräftegleichgewicht herrschen, also:

$$\begin{aligned} F_{\text{ges}}(x = 0) &= p_0 \cdot q - p_a \cdot q - m \cdot g = 0 \\ \Rightarrow q \cdot p_0 &= q \cdot p_a + m \cdot g. \end{aligned} \quad (24)$$

Nun nutzen wir Gl. 24 in Gl. 22 und direkt im Anschluss Gl. 23:

$$\begin{aligned} F_{\text{ges}}(x) &= q \cdot (p(x) - p_0) \\ &= qp_0 \left[\left(\frac{V_0}{V(x)} \right)^\gamma - 1 \right]. \end{aligned}$$

Abbildung 5 zeigt wie das Volumen $V(x)$ von x abhängt:

$$\begin{aligned} V(x) &= V_0 + \Delta V = V_0 + q \cdot x \\ \Rightarrow \left(\frac{V_0}{V(x)} \right)^\gamma &= \left(\frac{1}{1 + \frac{qx}{V_0}} \right)^\gamma = \left(1 + \frac{qx}{V_0} \right)^{-\gamma} \\ \Rightarrow F(x) &= qp_0 \left[\left(1 + \frac{qx}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Die Volumenänderung $\Delta V = q \cdot x$ ist in diesem Aufbau sehr klein im Gegensatz zum Gesamtvolumen, daher gilt $\frac{qx}{V_0} \ll 1$. Wir nutzen die Entwicklung des Ausdrucks $(1 + u)^{-\gamma}$ als Taylorreihe um $u = 0$, da wir diesen Ausdruck oben wiederfinden können. Wird die Entwicklung nach dem linearen Term abgebrochen ergibt sich $(1 + u)^{-\gamma} \approx 1 - \gamma u$.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{qx}{V_0} \right)^{-\gamma} &\approx 1 - \gamma \frac{qx}{V_0} \\ \Rightarrow F(x) &\approx - \frac{q^2 p_0 \gamma}{V_0} x. \end{aligned}$$

Allgemein gilt $F(x) = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$. Wir können hier eine Lösung des harmonischen Oszillators nutzen, $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x$, wobei ω der Kreisfrequenz entspricht.

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{q^2p_0\gamma}{mV_0}x = -\omega^2x$$

Das heißt in unserem Fall gilt $\omega = \sqrt{\frac{q^2p_0\gamma}{mV_0}}$, wobei sich Kreisfrequenz und Dauer einer Schwingung verbinden lassen:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mV_0}{q^2p_0\gamma}}. \quad (25)$$

Nun gilt es nur noch diesen Term nach dem Adiabatenexponenten umzuformen:

$$\gamma = \frac{4\pi^2mV_0}{q^2p_0T^2}.$$

9.2 Fehler(formeln) und Methoden

9.2.1 Gaußsche Fehlerfortpflanzung

Die Gaußsche Fehlerfortpflanzung beschreibt den Einfluss fehlerbehafteter Größen x_i auf die Ungenauigkeit einer sich aus diesen zusammensetzenden Größe y . Als ein verallgemeinertes Beispiel ist der Wert von y mit dessen Ungenauigkeit Δy zu bestimmen. Der Wert y hängt von mehreren anderen Größen x_i ab, $y(x_1, x_2, x_3, \dots)$.

Alle Größen x_1, x_2, x_3, \dots besitzen jeweils eine Ungenauigkeit $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots$. Dann ergibt sich Δy aus

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_3}\Delta x_3\right)^2 + \dots},$$

wobei die Brüche $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ partiellen Ableitungen von y nach einer Größe x_i entsprechen.

Ein Beispiel:

Um die Geschwindigkeit $v = \frac{l}{t}$ eines Fahrzeugs in einer Tempo 30-Zone zu bestimmen wird die Zeit t gestoppt, welche es für eine Strecke l benötigt. Beide Werte liegen vor: $l = (20,0 \pm 0,5) \text{ m}$ und $t = (2,2 \pm 0,2) \text{ s}$, also $v = \frac{20,0 \text{ m}}{2,2 \text{ s}} \approx 9,0909 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Die Fehlerformel lautet hier

$$\begin{aligned}\Delta v &= \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial l} \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \Delta t\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{t} \Delta l\right)^2 + \left(-\frac{l}{t^2} \Delta t\right)^2}\end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{aligned}&= \sqrt{\left(\frac{l}{t} \cdot \frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{l}{t} \cdot -\frac{\Delta t}{t}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{l}{t}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + (-1)^2 \cdot \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2\right)} \\ &= v \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}.\end{aligned}\tag{27}$$

Die Umformungen bis Gleichung (27) sind als generelle Vorlage zu verstehen, verglichen mit Gleichung (26) ist in diesem Beispiel keine starke Vereinfachung zu beobachten. In einigen Fällen ist dieses Schema jedoch sehr sinnvoll, insbesondere wenn dadurch lange Formeln letztendlich stark gekürzt werden. Allerdings ist zu beachten, dass es nicht auf alle Formeln anwendbar und somit jeder Fall einzeln abzuwägen ist.

Hier ergibt sich durch Einsetzen der Werte $\Delta v \approx 0,857 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Gerundet und mit umgerechneten Einheiten ist letztendlich $v \pm \Delta v = (9,1 \pm 0,9) \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx (33 \pm 3) \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

9.2.2 Start-Stopp-Fehler

Der Start-Stopp-Fehler beschreibt die Messungenauigkeit einer Zeitmessung. Im Praktikum werden Zeitmessungen meist per Hand vorgenommen, deren Genauigkeit von der messenden Person abhängt. Der Fehler ergibt sich, wie der Name bereits impliziert, aus der Ungenauigkeit der Messung sowohl beim Starten als auch beim Stoppen der Messung.

In der Regel wird einfach die gestoppte Zeit t_{Stopp} als Messzeit t genutzt, also $t = t_{\text{Stopp}}$. Streng genommen ergibt sich diese allerdings aus $t = t_{\text{Stopp}} - t_{\text{Start}}$, wobei meistens $t_{\text{Start}} = 0$, für eine beliebige Einheit, gegeben ist.

Dieser Punkt ist bei der Betrachtung der Fehler relevant, da wie oben beschrieben beide Größen fehlerbehaftet sind. Durch Anwendung von Gaußscher Fehlerfortpflanzung ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta t &= \sqrt{\left(\frac{\partial t}{\partial t_{\text{Start}}} \Delta t_{\text{Start}}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial t_{\text{Stopp}}} \Delta t_{\text{Stopp}}\right)^2} \\ &= \sqrt{(-1 \cdot \Delta t_{\text{Start}})^2 + (1 \cdot \Delta t_{\text{Stopp}})^2} \\ &= \sqrt{\Delta t_{\text{Start}}^2 + \Delta t_{\text{Stopp}}^2}.\end{aligned}$$

Es ist sinnvoll anzunehmen, dass die Messungenauigkeiten beim Starten und Stoppen gleich sind, also $\Delta t_S = \Delta t_{\text{Start}} = \Delta t_{\text{Stopp}}$. Somit folgt

$$\Delta t = \sqrt{2 \cdot \Delta t_S^2} = \sqrt{2} \cdot \Delta t_S.$$

Die Reaktionszeit hängt von der die Messung durchführenden Person und den Umständen ab. Es ist wichtig zu unterscheiden, ob ein Ereignis völlig überraschend passiert oder ob die Messung gut vorhersehbar ist, wie zum Beispiel periodische Wiederholungen oder lineare (langsame) Bewegungen. Es ist realistisch bei vorhersehbaren Messungen eine tendenziell kleine Reaktionszeit zu wählen, welche die meisten Personen mit den gegebenen Bedingungen erreichen können, also beispielsweise $\Delta t_S = 0,1 \text{ s}$. Für diesen Wert ergibt sich schließlich $\Delta t \approx 0,14 \text{ s}$. Um einen eigenen Wert für Δt_S zu finden ist es also notwendig die Umstände des jeweiligen Versuchs und das eigene Reaktionsvermögen zu beurteilen. Sollten Sie zu der Einschätzung gelangen, eine andere Reaktionszeit zu benötigen, so passen Sie den Wert von Δt_S und entsprechend Δt an.

In diesem Versuch ist die Schwingung des Zylinders idealerweise harmonisch und somit gut vorhersehbar. Beachten Sie dies bei der Abschätzung Ihrer Reaktionszeit.

9.2.3 Der Mittelwert und dessen Standardabweichung

Angenommen es liegen n Werte x_i einer Größe x mit gleicher Ungenauigkeit vor, also $\Delta x_i = \Delta x$ für alle i mit $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Dann ergibt sich deren Mittelwert \bar{x} wie folgt:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Als Fehler wird insbesondere im Zuge dieses Praktikums die Standardabweichung des Mittelwerts genutzt, nicht zu verwechseln mit der Standardabweichung einer Einzelmessung, deren Formel recht ähnlich ist, auf die hier aber nicht weiter eingegangen wird. Die relevante Formel der Standardabweichung des Mittelwerts, hier als $\Delta \bar{x}$ bezeichnet, lautet

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Sollte es vorkommen, dass für alle i gilt $\bar{x} = x_i$, so würde der Wert $\Delta \bar{x}$ verschwinden. In diesem Fall ist eine sinnvolle Alternative die Gaußsche Fehlerfortpflanzung zu nutzen, was zu $\Delta \bar{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{n}}$ führt, da alle x_i die gleiche Ungenauigkeit Δx besitzen.

Ist der Mittelwert von nur zwei Werten x_1 und x_2 gesucht, so vereinfacht sich die Formel der Standardabweichung des Mittelwerts drastisch und wir erhalten

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \& \quad \Delta \bar{x} = \left| \frac{x_1 - x_2}{2} \right|.$$

Häufig gilt $x_2 > x_1$, sodass $\Delta \bar{x} = \frac{x_2 - x_1}{2}$.

9.2.4 Gewichteter Mittelwert

Wie in Abschnitt 9.2.3 zum Mittelwert wird auch hier angenommen, es liegen n Werte x_i einer Größe x vor. Nun unterscheiden sich jedoch die Ungenauigkeiten Δx_i untereinander. In diesem Fall werden Wichtungsfaktoren benutzt, um die unterschiedlichen Genauigkeiten Δx_i zu berücksichtigen und die Werte x_i entsprechend zu gewichten. Die Formel für die Wichtungsfaktoren lautet

$$w_i = \frac{1}{(\Delta x_i)^2}.$$

Damit ergibt sich für den gewichteten Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}.$$

Die Berechnung der Ungenauigkeit $\Delta \bar{x}$ von \bar{x} lässt sich aufteilen in die Berechnung eines internen und eines externen Teils. Die externe Berechnung entspricht der Standardabweichung des Mittelwerts, während die interne Berechnung der Gaußschen Fehlerfortpflanzung entspricht. Die Formeln lauten:

$$\Delta \bar{x}_{\text{extern}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n w_i}} \quad \& \quad \Delta \bar{x}_{\text{intern}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i}}.$$

In der Anwendung werden beide Werte berechnet und der größere der beiden Werte ausgewählt.