I. Physikalisches Institut
Universität zu Köln

W06: Wärmeleitung

Praktikum A für Nebenfächler

Version vom 13. Juni 2023

Abzugeben bis: ________________

Assistent: ________________

Gruppenmitglieder: ________________

____

____

Wichtige Informationen

Zur Bearbeitung ist es zwingend erforderlich, dass Sie sich mit den Grundlagen der Fehlerrechnung (u. a. Gaußsche Fehlerfortpflanzung, (gewichteter) Fehler des Mittelwerts, grafische Geradenanpassung) vertraut machen. Informationen dazu finden Sie beispielsweise im Dokument „allgemeine Hilfen für das Praktikum A“ auf der Webseite des A-Praktikums[a].

Aufgrund des Umfangs dieses Versuchs ist es nötig die Blätter mittels Schnellhefter o. ä. zu binden. Bitte lochen Sie die Blätter und heften Sie diese sorgfältig ein. Sollte die Form der Abgabe nicht den Regularien entsprechen, kann die*der Assistent*in die Annahme der Auswertung verweigern.

Versuchen Sie innerhalb der vorgegebenen Lücken zu bleiben. Diese geben ungefähr den an entsprechender Stelle erwarteten Umfang vor. Sollte der Platz dennoch nicht ausreichen, fügen Sie ganze Blätter ein, auf welchen deutlich markiert ist, was wozu gehört.

Beachten Sie bitte, dass alle entsprechenden Lücken und Fragestellungen ausgefüllt und beantwortet werden müssen. Insbesondere sind Lücken bis hin zum Messprotokoll bereits vor dem Versuchstag zu bearbeiten. Dies müssen Sie vor Ort nachweisen und wichtige Inhalte frei wiedergeben können. Es wird davon ausgegangen, dass alle Gruppenmitglieder die vollständige Anleitung durchgelesen und verstanden haben. Sollten Sie am Versuchstag nicht ausreichend auf den Versuch vorbereitet sein, wird die*der Assistent*in Sie nicht am Versuch teilnehmen lassen.

Die Abgabe muss alle Seiten umfassen, insbesondere aber Seiten mit auszufüllenden Lücken. Dazu gehören in jedem Fall die Titelseite, die Vorbereitung, das Messprotokoll und die Auswertung mit Diskussion.

Alle auf dem Deckblatt aufgeführten Gruppenmitglieder sind für die Bearbeitung und fristgerechte Abgabe des Versuchsberichts bzw. dessen erforderlichen Korrekturen zuständig und verantwortlich. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass Sie sich mit den Regeln des A-Praktikums[a] vertraut gemacht haben.

[a] zu finden unter: `https://www.astro.uni-koeln.de/AP/`

Es ist nicht notwendig den Anhang mit auszudrucken. Allerdings kann dieser gerade bei Detailfragen enorm weiterhelfen und soll durchgelesen und verstanden sein.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Dieser Versuch befasst sich mit dem Phänomen der Wärmeleitung. Sie ist eine der drei Möglichkeiten für den Transport von Wärme. Wie Sie aus dem Alltag wissen, leiten verschiedene Materialien Wärme mit sehr unterschiedlicher Qualität. Die physikalische Größe, mit der dies gemessen wird, nennt man Wärmeleitfähigkeit. Je größer ihr Wert ist, umso besser leitet ein Stoff Wärme weiter. So hat zum Beispiel Holz üblicherweise geringe Wärmeleitfähigkeiten von $\approx 0{,}14\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K\,m}}$, Metalle hingegen liegen im Bereich um $\approx 100\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K\,m}}$.

Deshalb fühlen sich beispielsweise Holzbänke nach einem meist kurzen Angleichen der Kontaktstelle an die jeweilige Körpertemperatur eher angenehm an, ohne dass man im Winter auf der Parkbank dauerhaft festfriert oder sich in der Sauna verbrennt. Beim Sitzen auf Metall wird hingegen die Wärme der heißeren Region deutlich schneller zur kälteren Region abtransportiert, sodass sich eine metallische Sitzgelegenheit je nach Umgebungstemperatur auch über einen längeren Zeitraum sehr kalt oder eben heiß anfühlen würde und daher unter solchen extremen Bedingungen nicht zu empfehlen ist.

2 Vorbereitung (vor dem Praktikum, zu Hause)

Als Vorbereitung auf den Versuch setzen Sie sich mit den folgenden Stichpunkte und theoretischen Überlegungen auseinander. Diese sollten Sie soweit verstehen, dass Sie in der Lage sind, diese am Versuchstag selbstständig wiederzugeben. Als Teil dieser Vorbereitung müssen Sie die nachfolgenden Lücken am Versuchstag ausgefüllt vorzeigen können. Zu vielen Lücken befinden sich Hinweise verteilt in der gesamten Anleitung, inklusive dem Anhang (insbesondere Abschnitt 8.1).

Die dafür relevanten Begriffe und Gesetzmäßigkeiten umfassen:

- Kalorische Begriffe: Wärme, Wärmeleitfähigkeit, Wärmekapazität, spezifische Wärmekapazität, Wasserwert, Kalorimeter
- 1. Hauptsatz der Thermodynamik, Bestimmung von Mischungstemperaturen, Wärmetransport, Wärmeleitungsgleichung
- Maßeinheiten: Joule, Kalorie, Watt, etc.

2.1 Wärme

1. Hauptsatz: In einem geschlossenen System (d. h. es gibt keinen Materieaustausch mit der Umgebung, aber Energieaustausch findet statt) kann sich die innere Energie U nur durch verrichtete Arbeit W oder/und Transport von Wärme Q ändern[1]:

$$\Delta\_\_\_\_\_ = \Delta\_\_\_\_\_ + \Delta\_\_\_\_\_ \tag{2.1}$$

Dabei steht im Allgemeinen und im Folgenden ein negativer Wert von ΔW und ΔQ für Energietransport aus dem System heraus und ein positiver Wert für Energietransport in das System hinein. Nennen Sie drei Mechanismen des Wärmetransportes:

____

____

____

[1] Die geforderte Darstellung des 1. HS ist nur eine Vereinfachung und streng genommen nicht akkurat.

Bei Wärme handelt es sich um die Energie, welche von einem Körper auf einen anderen

aufgrund einer ______________________________-Differenz übergeht, und ist damit eine Prozessgröße. Die (übergehende) Wärmemenge ΔQ ist proportional zur Wärmekapazität des Körpers. Die Wärmekapazität (Eigenschaft eines Körpers) ist definiert durch (auch eine (gebräuchliche) Einheit angeben!):

$$C = \underline{\hspace{3cm}} \left[\underline{\hspace{2cm}}\right] \tag{2.2}$$

bzw. die spezifische Wärmekapazität (Eigenschaft eines Stoffes)

$$c = \underline{\hspace{3cm}} \tag{2.3}$$

Die Maßeinheiten Kalorie, Joule und Wattstunde verhalten sich zueinander wie folgt:

$$1\,\mathrm{cal} = \underline{\hspace{2.5cm}}\mathrm{J} = \underline{\hspace{2.5cm}}\mathrm{Wh} \tag{2.4}$$

Gegeben sei ein Zylinder mit Durchmesser f und der Höhe h aus einem Material der Dichte ρ_M und der spezifischen Wärmekapazität c_M. Nutzen Sie den Zusammenhang zwischen der Wärmekapazität C_M des Körpers und dessen spezifischer Wärmekapazität c_M, um die Formel für C_M zu notieren:

$$C_\mathrm{M} = \underline{\hspace{7cm}} \tag{2.5}$$

Die Höhe und der Durchmesser seien nun beispielhaft mit Messfehlern behaftet: Δh, Δf. Die Formel für den Fehler der Wärmekapazität ergibt sich demnach mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung (s. Abschnitt 8.2.1) als:

$$\Delta C_\mathrm{M} = \sqrt{\left(\frac{\partial C_\mathrm{M}}{\partial h}\Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial C_\mathrm{M}}{\partial f}\Delta f\right)^2} \tag{2.6}$$

Formulieren Sie diese Gleichung aus und vereinfachen Sie den Ausdruck soweit wie möglich, indem Sie dem Beispiel in Abschnitt 8.2.1 folgen. Notieren Sie die dafür nötigen Zwischenschritte und geben Sie die vereinfachte Formel am Ende in Gl. (2.7) an.

$$\Delta C_{\mathrm{M}} = \underline{\hspace{8cm}} \tag{2.7}$$

2.2 Mischungstemperaturen

Wird kaltes Wasser (Masse m_1, Temperatur T_1) mit warmem Wasser (m_2, T_2) gemischt, ist die resultierende Mischungstemperatur T_3 abhängig von den Temperaturen und Massen. Die von m_1 aufgenommene Wärmemenge ist gleich der von m_2 abgegebenen:

$$\Delta Q_1 = -\Delta Q_2 \tag{2.8}$$

Finden Sie die Formel für die Mischungstemperatur T_3, indem Sie Gleichung (2.8) umformen (Einsetzen von Gleichung (2.3), Annahmen $c_1 = c_2$, $\Delta T_1 = T_3 - T_1$, und $\Delta T_2 = T_3 - T_2$):

$$T_3 = \underline{\hspace{8cm}} \tag{2.9}$$

Zum Vergleich: Die allgemeine Berechnung der Mischungstemperaturen für Körper mit unterschiedlichen Wärmekapazitäten ist gegeben durch:

$$T_3 = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2} \tag{2.10}$$

2.3 Wasserwert

Ein Kalorimeter ist im Allgemeinen eine Apparatur zur Messung von Wärmeeffekten bei physikalischen, chemischen oder biologischen Prozessen. Der in diesem Versuch verwendete Aufbau besteht im Prinzip aus einem offenen, wärmedämmenden Gefäß (Dewargefäß) und einem Thermometer, um die einer Wassermenge über einen Metallstab zugeführte Wärme bestimmen zu können (vgl. Abb. 3.1). Der sogenannte Wasserwert ist die Wärmekapazität eines Gefäßes, bzw. des Kalorimeters, wobei der Name sich auf die im Folgenden beschriebene Methode zur Bestimmung der Wärmekapazität mit Wasser bezieht. Der Wasserwert beeinflusst die Mischungstemperatur und muss deshalb bekannt sein.

Wir mischen zu einer kalten Wassermenge (Masse m_1, Temperatur T_1) in dem Dewargefäß eine Menge heißen Wassers (m_2, T_2). Das heiße Wasser gibt dabei eine Wärmemenge ΔQ an das kalte Wasser und das (kalte) Kalorimeter ab, wodurch sich eine Mischungstemperatur T_3 einstellt. Die Temperaturänderung ist über die Wärmekapazität mit der transportierten Wärme verknüpft:

$$\Delta Q = C \Delta T \tag{2.11}$$

In unserem Fall gilt also

$$\Delta Q_2 = c_\mathrm{W} m_2 \left(T_3 - T_2\right) \qquad \& \qquad \Delta Q_1 = \left(K + c_\mathrm{W} m_1\right)\left(T_3 - T_1\right) \ . \tag{2.12}$$

Dabei bezeichnet c_W die spezifische Wärmekapazität von Wasser und K die Wärmekapazität (Wasserwert) des Kalorimeters. Einsetzen von (2.12) in (2.8) und Auflösen nach K führt dann zu (vergleichen Sie Ihr Ergebnis zur Kontrolle mit Gl. (4.3)):

$$K = \underline{\hspace{6cm}} \tag{2.13}$$

2.4 Wärmeleitfähigkeit

Der Wärmestrom I ist definiert als die bei einem Vorgang transportierte Wärmemenge dQ pro Zeit dt

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \; . \tag{2.14}$$

Die Wärmeleitfähigkeit ist eine Stoffeigenschaft und bestimmt den Wärmestrom aufgrund eines Temperaturunterschiedes ΔT in Abhängigkeit der Ausmaße eines Körpers: der Länge *parallel* zum Wärmestrom (bzw. Temperaturgradienten grad T) und des Querschnitts *senkrecht* zum Wärmestrom. Die Definition (und Einheit) der Wärmeleitfähigkeit eines Körpers mit Länge l und Querschnitt q ist

$$\lambda = \underline{\hspace{6cm}} \quad \left[\underline{\hspace{3cm}} \right] \tag{2.15}$$

Zu beachten ist, dass λ wiederum temperaturabhängig ist, bzw. nur in einem gewissen Temperaturbereich näherungsweise konstant ist. Geben Sie Beispiele für Materialien und ihre Wärmeleitfähigkeiten an:

____

____

____

(Quelle(n): ____)

In diesem Versuch wird die ______________________ von Messing bestimmt, indem der zeitliche Verlauf der Temperatur des *kalten* Reservoirs gemessen wird, dem über den Wärmestrom I Wärme hinzugefügt wird. Die dazu benötigte Wärmeleitungsgleichung ist in Abschnitt 8.1 (Anhang) hergeleitet. Vollziehen Sie die einzelnen Schritte nach und beantworten Sie die folgenden Fragen, bzw. füllen Sie die Lücken aus:

Das sich erwärmende Reservoir besteht aus den drei Komponenten (der Einfluss des Thermometers ist dabei vernachlässigbar):

____

____

____

Um die gesamte Wärmekapazität des erwärmten Reservoirs zu bestimmen, müssen die einzelnen Wärmekapazitäten ______________________ werden. Warum kann für den Temperaturunterschied ΔT die zeitliche Abhängigkeit der kühlen Temperatur T_1 vernachlässigt werden?

____

____

____

3 Versuchsaufbau und -beschreibung

Wir betrachten zwei thermisch isolierte Wärmespeicher, die durch einen Metallstab verbunden sind, so dass ein Wärmetransport vom heißeren zum kälteren Wärmespeicher stattfindet. Der Wärmestrom, d. h. die pro Zeiteinheit durch den Stab transportierte Wärmemenge, hängt von der thermischen Leitfähigkeit des Materials ab, aus dem der Stab besteht. Aufgabe ist es, diese Leitfähigkeit zu messen.

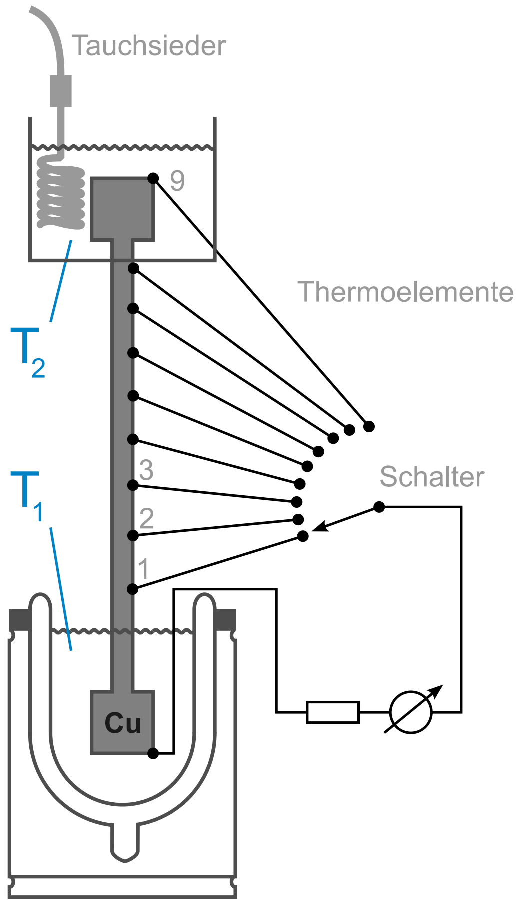

Abbildung 3.1: *Skizze des Versuchsaufbaus.*

Dazu benutzen wir folgende Anordnung (siehe Abb. 3.1): Das obere Ende des senkrecht ausgerichteten Stabs ragt in ein Gefäß mit siedendem Wasser. Seine Temperatur T_2 wird mit Hilfe eines Tauchsieders möglichst konstant auf etwa 100 °C gehalten. Der Tauchsieder ist an einen Leistungsregler[1] angeschlossen (nicht abgebildet). Das untere Ende des Stabs ist von Eiswasser umgeben, dessen Temperatur T_1 etwa 0 °C beträgt. Als Behälter dient hier ein Dewargefäß. Beide Stabenden sind so geformt, dass ein guter Wärmeübergang gewährleistet ist. Aufgrund des Temperaturunterschiedes beider Wärmespeicher entsteht im Stab ein Temperaturgefälle, längs dessen Wärme durch den Stab fließt. Nach Entfernen des Eises führt dies zu einem Temperaturanstieg des Wassers im Dewargefäß, der dem Wärmestrom und damit der thermischen Leitfähigkeit des Stabmaterials proportional ist.

Der Temperaturverlauf im Stab wird mit Hilfe von neun Thermoelementen gemessen, denen die Eiswassermischung im unteren Behälter als gemeinsame Referenz dient. Die Thermospannung ist der Temperaturdifferenz zwischen beiden Enden des Thermoelements proportional.

[1]Beim Leistungssteller handelt es sich um eine Phasenanschnittsteuerung, mit welcher hier effektiv die Leistung der Tauchsieder reguliert werden kann.

4 Benötigte Formeln

4.1 Wärmekapazität des Dewargefäßes (Kalorimeter)

Der Wasserwert K des verwendeten Kalorimeters ergibt sich aus der spezifischen Wärmekapazität von Wasser c_W, den Massen vom kalten und warmen Wasser m_1 und m_2 sowie den Temperaturen von kaltem und warmem Wasser und der Mischung T_1, T_2 und T_3 ($T_3 = T_\mathrm{Misch}$):

$$m_2 = m_\mathrm{Misch} - m_1 \tag{4.1}$$

$$\Delta m_2 = \sqrt{(\Delta m_\mathrm{Misch})^2 + (-\Delta m_1)^2} \tag{4.2}$$

$$K = \frac{c_\mathrm{W} m_2 (T_2 - T_3)}{(T_3 - T_1)} - c_\mathrm{W} m_1 \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}\Delta K = c_\mathrm{W} \Bigg[& \left(m_2 \frac{T_2 - T_3}{(T_3 - T_1)^2} \Delta T_1 \right)^2 + \left(\frac{m_2}{T_3 - T_1} \Delta T_2 \right)^2 + \left(m_2 \frac{T_2 - T_1}{(T_3 - T_1)^2} \Delta T_3 \right)^2 \\ & + {\Delta m_1}^2 + \left(\frac{T_2 - T_3}{T_3 - T_1} \Delta m_2 \right)^2 \Bigg]^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$c_\mathrm{W} = 1 \ \frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{g\ K}}$$

4.2 Wärmeleitfähigkeit von Messing (Kupfer)

Die Wärmeleitfähigkeit des Stabes λ ergibt sich aus dessen Querschnittsfläche q, der Stablänge l, der Temperaturänderung pro Zeiteinheit $\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}$ im kalten Wasser, der Temperatur des siedenden Wassers T_2, der mittleren Temperatur des kalten Wassers $\overline{T_1}$ und der gesamten Wärmekapazität der zu erwärmenden Materialien C_gesamt.

Teilweise müssen die darin vorkommenden Größen erst noch mitsamt ihrer Fehlerwerte bestimmt werden, wie z. B. die Querschnittsfläche des Stabs q und die gesamte Wärmekapazität C_gesamt, welche wiederum vom Volumen des Stabfußes V_M abhängt. Dabei bezeichnet $c_\mathrm{W/M}$ die spezifische Wärmekapazität von Wasser bzw. Messing, $m_\mathrm{W/M}$ die entsprechende Masse, ρ_M die Dichte von Messing und V_M das Volumen des Stabfußes.

$$\overline{T_1} = \frac{1}{2}\left(T_{\mathrm{Anfang}} + T_{\mathrm{Ende}}\right) \tag{4.5}$$

$$\Delta\overline{T_1} = \frac{1}{2}\Big|T_{\mathrm{Anfang}} - T_{\mathrm{Ende}}\Big| \tag{4.6}$$

$$q = \frac{\pi}{4}d^2 \tag{4.7}$$

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}d\Delta d\right)^2} \tag{4.8}$$

$$V_{\mathrm{M}} = \frac{f^2}{4}\pi h \tag{4.9}$$

$$\Delta V_{\mathrm{M}} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}f^2\Delta h\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}fh\Delta f\right)^2} \tag{4.10}$$

$$C_{\mathrm{gesamt}} = c_{\mathrm{W}}m_{\mathrm{W}} + K + c_{\mathrm{M}}\rho_{\mathrm{M}}V_{\mathrm{M}} \tag{4.11}$$

$$\Delta C_{\mathrm{gesamt}} = \sqrt{(c_{\mathrm{W}}\Delta m_{\mathrm{W}})^2 + (\Delta K)^2 + (c_{\mathrm{M}}\rho_{\mathrm{M}}\Delta V_{\mathrm{M}})^2} \tag{4.12}$$

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{lC_{\mathrm{gesamt}}}{q\left(T_2 - \overline{T_1}\right)} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}\Delta\lambda = &\left[\left(\frac{\lambda}{\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}}\Delta\left(\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}\right)\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{l}\Delta l\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{C_{\mathrm{gesamt}}}\Delta C_{\mathrm{gesamt}}\right)^2\right. \\ &\left.+ \left(\frac{\lambda}{q}\Delta q\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{T_2 - \overline{T_1}}\Delta T_2\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{T_2 - \overline{T_1}}\Delta\overline{T_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}= \lambda&\left[\left(\frac{\Delta\left(\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}\right)}{\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C_{\mathrm{gesamt}}}{C_{\mathrm{gesamt}}}\right)^2\right. \\ &\left.+ \left(\frac{\Delta q}{q}\right)^2 + \frac{\Delta T_2^2 + \Delta\overline{T_1}^2}{\left(T_2 - \overline{T_1}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{4.15}$$

5 Durchführung (im Praktikum)

Sicherheitshinweise zur Durchführung im Praktikum

In diesem Versuch verwenden Sie kochendes Wasser. Achten Sie daher besonders darauf Verbrühungen zu vermeiden. Seien Sie vorsichtig beim Umfüllen des kochenden Wassers in andere Gefäße. Berühren Sie nicht die Wand des oberen Behälters, wenn er mit kochendem Wasser gefüllt ist. Überprüfen Sie regelmäßig den Wasserstand im oberen Behälter: Der Tauchsieder muss mit Wasser bedeckt sein, um keinen Schaden zu nehmen; der Behälter sollte aber auch nicht so voll sein, dass Sie durch überkochendes Wasser verletzt werden. Nutzen Sie die Einstellmöglichkeit des Leistungsreglers, um ein übermäßiges Kochen des Wassers durch den Tauchsieder zu vermeiden (siehe Abb. 5.1 inkl. Bildunterschrift). Bei Verwendung des Leistungsreglers zur Regulierung hat sich gezeigt, dass der obere Behälter etwa *zur Hälfte bis zu zwei Drittel* mit Wasser gefüllt sein sollte.
Der Schlauch am unteren Ende des oberen Behälters dient dessen Entleerung am Ende des Versuchs. Nehmen Sie ihn erst zu diesem Zeitpunkt aus der Halterung und berücksichtigen Sie auch hier die hohe Temperatur des Wassers.
Schalten Sie den Tauchsieder immer sofort aus, wenn Sie ihn aus dem Wasser nehmen und beachten Sie, dass er noch eine Zeit lang heiß bleibt.

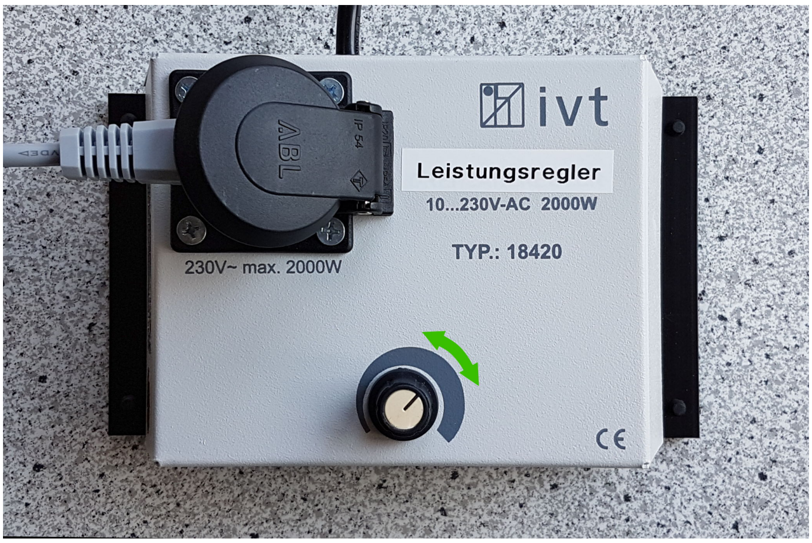

Abbildung 5.1: *Foto des verwendeten Leistungsreglers. Der hier gezeigte grüne Doppelpfeil zeigt den Einstellbereich, welcher für ein leichtes Kochen des Wassers zu erwarten ist, ohne dass sprudelnd kochendes Wasser aus dem Behälter spritzt. Fangen Sie mit einer kleineren Leistung an und erhöhen Sie die Einstellung nur falls nötig.*

Allgemeine Hinweise

Der wichtigste Merksatz für diesen Versuch heißt: *Wiege das Wasser.* Stellen Sie sicher, dass Sie alle Wassermengen gewogen haben, bevor Sie sie weg schütten, das erspart Ihnen lästige Wiederholungen der Versuchsteile. Die nachfolgenden Tabellen helfen Ihnen zu erkennen, ob Sie alle relevanten Wassermassen gewogen haben.
Nutzen Sie ein analoges Thermometer, um die Temperatur des siedenden Wassers zu bestimmen, und ein Digitalthermometer für die anderen Wassermengen. Bei der Verwendung der Digitalthermometer im Dewargefäß ist etwas Fingerspitzengefühl gefragt, um die dünne Glaswand des Gefäßes nicht mit der Thermometerspitze zu beschädigen. Im Praktikum sind verschiedene Modelle von Digitalthermometern im Einsatz, welche laut entsprechendem Hersteller unterschiedliche Ungenauigkeiten aufweisen. Beachten Sie dabei, dass selbst die präzisesten Modelle laut Hersteller im Temperaturbereich von -30 bis $+120\,°\mathrm{C}$ nicht genauer sind als $\pm 0{,}2\,°\mathrm{C}$ und Sie somit von mindestens dieser oder sogar einer größeren Messungenauigkeit ausgehen sollten.

5.1 Bestimmung der Wärmekapazität des Dewargefäßes (Kalorimeter)

Füllen Sie eine bestimmte Menge kalten Wassers (Masse m_1, Temperatur T_1) in das Kalorimeter und bereiten Sie mit Hilfe der Wasserkocher etwas kochendes Wasser (m_2, T_2) vor. Es empfiehlt sich, deutlich mehr kaltes als heißes Wasser zu verwenden, also z.B. $m_1 = 600\,\mathrm{g}$ und $m_2 = 200\,\mathrm{g}$.

Nehmen Sie 5 min lang die Temperatur des kalten Wassers auf (alle 30 s). Anschließend lassen Sie die Stoppuhr weiterlaufen und gießen zügig das kochende Wasser hinzu. Nach dem Zugießen des kochenden Wassers nehmen Sie weitere 5 min lang die Temperatur der Mischung T_{Misch} unter ständigem Umrühren auf. *Zum Zeitpunkt des Mischens müssen Sie in möglichst kurzen Intervallen messen, z. B. für 15 Sekunden alle 3 s, da sich die Temperatur beim Zugießen sehr schnell ändert*[1]. Danach messen Sie wieder alle 30 s. Achten Sie bei der Zugabe des heißen Wassers möglichst darauf, nicht direkt auf das Thermometer zu gießen und dadurch die Temperaturmessung zu verfälschen. Durch vorsichtiges Bewegen des Thermometers können Sie eher die Temperatur des gemischten Wassers messen und die Messung heißer oder kalter Blasen möglichst vermeiden.

Die Masse des kochenden Wassers m_2 bestimmen Sie am genauesten aus der Differenz der Mischungsmasse m_{Misch} und der Masse des kalten Wassers m_1 (siehe Gl. (4.1)).

[1] Wenn Sie also am Ende der ersten 5 min die letzte Messung bei 300 s aufgenommen haben, sollte die nächste Messung bereits bei 303 s (5:03 min) erfolgen, direkt danach bei 306 s (5:06 min), etc. bis 315 s (5:15 min). Dann gehen Sie wieder zu 30 s–Intervallen über, also die darauf folgende Messung ist bei 345 s (5:45 min), dann bei 375 s (6:15 min) und so weiter.

t[min:s]	t[s]	T_1[°C]
0:00	0	
0:30	30	
1:00	60	
1:30	90	
2:00	120	
2:30	150	
3:00	180	
3:30	210	
4:00	240	
4:30	270	
5:00	300	
Δt[s]		ΔT_1[°C]

T_2[°C]	ΔT_2[°C]

m_1[g]	
m_{Misch}[g]	
Δm_{Misch}, Δm_1[g]	

Fortsetzung der Messung

t[min:s]	t[s]	T_{Misch}[°C]
bspw. 5:03	bspw. 303	

Tabelle 5.1: *Messwerte zur Bestimmung der Wärmekapazität des Dewargefäßes*

5.2 Bestimmung des Temperaturgefälles im Stab

Führen Sie eine Nullmessung für alle neun Thermoelemente durch, solange der Stab Raumtemperatur hat (durch Umschalten am Messgerät können Sie nacheinander alle Thermoelemente abfragen). Obwohl beide Enden der Thermoelemente nun die gleiche Temperatur haben, zeigen alle unterschiedliche Spannungen an. Diese Werte müssen von allen zukünftigen Messwerten mit dem jeweiligen Thermoelement subtrahiert werden (vergleichbar dem Tarieren von Waagen).
Bringen Sie im Wasserkocher 1,5 l Wasser zum Sieden und bereiten Sie in demselben Dewargefäß, das Sie für Aufgabe 5.1 verwendet haben, eine Eiswassermischung vor. (Befüllen Sie geleerte Eiswürfelbehälter bitte sofort wieder und stellen Sie diese wieder in den Gefrierschrank).
Bringen Sie nun zügig das untere Ende des Stabes in die Eiswassermischung und füllen Sie siedendes Wasser in den oberen Behälter.
Nehmen Sie nun unmittelbar anschließend und dann alle 2 bis 3 min den Temperaturverlauf im Stab auf. Dazu lesen Sie kurz hintereinander die Thermospannungen der einzelnen Thermoelemente ab. Nehmen Sie mindestens sechs Temperaturverläufe auf. Den letzten Verlauf nehmen Sie auf, wenn sich der Stab im stationären Zustand befindet. Für jeden Temperaturverlauf schalten sie das Messgerät kurz hintereinander auf jede der Messstellen.

Führen Sie alle Messungen vorsichtig aber auch zügig durch und sorgen Sie mit Hilfe des Tauchsieders und des Leistungsreglers dafür, dass das Wasser im oberen Behälter permanent siedet. Nehmen Sie für jeden Temperaturverlauf auch die Temperaturen des siedenden und des Eiswassers (des Wassers, nicht des Eises) auf.

Stellen Sie durch Zugießen von siedendem Wasser sicher, dass der Tauchsieder immer von Wasser bedeckt bleibt, da er sich ansonsten zum Schutz vor Überhitzung aus Sicherheitsgründen abschaltet. Wenn ein Tauchsieder nicht mehr heiß wird ist er meistens nicht wirklich defekt, sondern er hat sich zum Schutz vor Überhitzung abgeschaltet. Um die bei diesem Versuch verwendeten Modelle wieder zu aktivieren, warten Sie bis der Tauchsieder abgekühlt ist und drücken dann äußerst fest auf die kreisförmige Vertiefung im Griff des Tauchsieders, bis Sie ein deutliches Klick-Geräusch hören. Wenn es Ihnen nicht gelingt den Tauchsieder wieder in Betrieb zu nehmen informieren Sie die Versuchsassistenz.
Durch geschickten Einsatz des Leistungsreglers ist es möglich das Wasser im oberen Behälter konstant leicht sieden zu lassen, ohne dass sich der Tauchsieder abschaltet.

t[min]	U_1[mV]	U_2[mV]	U_3[mV]	U_4[mV]	U_5[mV]	U_6[mV]	U_7[mV]	U_8[mV]	U_9[mV]	T_1[°C]	T_2[°C]
Nullmesung											
0											
2											
4											
6											
8											
10											
12											
14											
16											
	ΔU[mV]									ΔT_1[°C]	ΔT_2[°C]

Tabelle 5.2: *Messwerte zur Bestimmung des Temperaturgefälles im Stab*

5.3 Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Messing (Kupfer)

Lassen Sie weiterhin das Wasser im oberen Behälter sieden, entfernen Sie zügig (!) das Eis aus der Eiswassermischung und verringern Sie zügig (!) die Wassermenge, so dass der Fuß des Stabes gerade noch bedeckt ist (ist die Wassermenge und damit die Wärmekapazität zu groß, dauert der Wärmeaustausch zu lange). Nutzen Sie dafür die Hebevorrichtung. Messen Sie die Temperatur T des Wassers im Dewargefäß mit einem Digitalthermometer als Funktion der Zeit t, solange bis die Temperatur des Wassers um insgesamt 2 °C angestiegen ist. Lesen Sie die Temperatur etwa alle 2 min ab. Die Temperatur des kochenden Wassers im oberen Behälter messen Sie wie zuvor. *Vergessen Sie nicht, die Menge des erwärmten Wassers im Dewargefäß nach Durchführung des Versuchs zu messen.*

t[min:s]	t[s]	T_1[°C]	T_2[°C]
0:00	0		
2:00	120		
4:00	240		
6:00	360		
8:00	480		
10:00	600		
12:00	720		
14:00	840		
Δt[s]		ΔT_1[°C]	ΔT_2[°C]

Wasser m_1[g]	Δm_1[g]
Stablänge l[cm]	Δl[cm]
Stabdurchmesser d[cm]	Δd[cm]
Fußhöhe h[cm]	Δh[cm]
Fußdurchmesser f[cm]	Δf[cm]

Tabelle 5.3: *Messwerte zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Messing (Kupfer)*

AT: ______________________ ____

(Datum) (Unterschrift Versuchsassistenz)

6 Auswertung (zu Hause)

Bitte führen Sie zu jedem Wert eine entsprechende Fehlerrechnung durch. Geben Sie die verwendeten Formeln an. Zeichnen Sie Ihre Diagramme in den dafür vorgesehenen Vorlagen ein und beschriften Sie sie vollständig (zu welcher Aufgabe gehört das Diagramm?, was ist auf den Achsen aufgetragen?). Die korrekte Form zur Angabe von Ergebnissen sowie Hinweise zur Fehlerrechnung entnehmen Sie bitte dem Anhang (Abschnitt 8) und den diesbezüglichen Dokumenten auf der Webseite des Praktikum A[1].

6.1 Bestimmung der Wärmekapazität des Dewargefäßes (Kalorimeter)

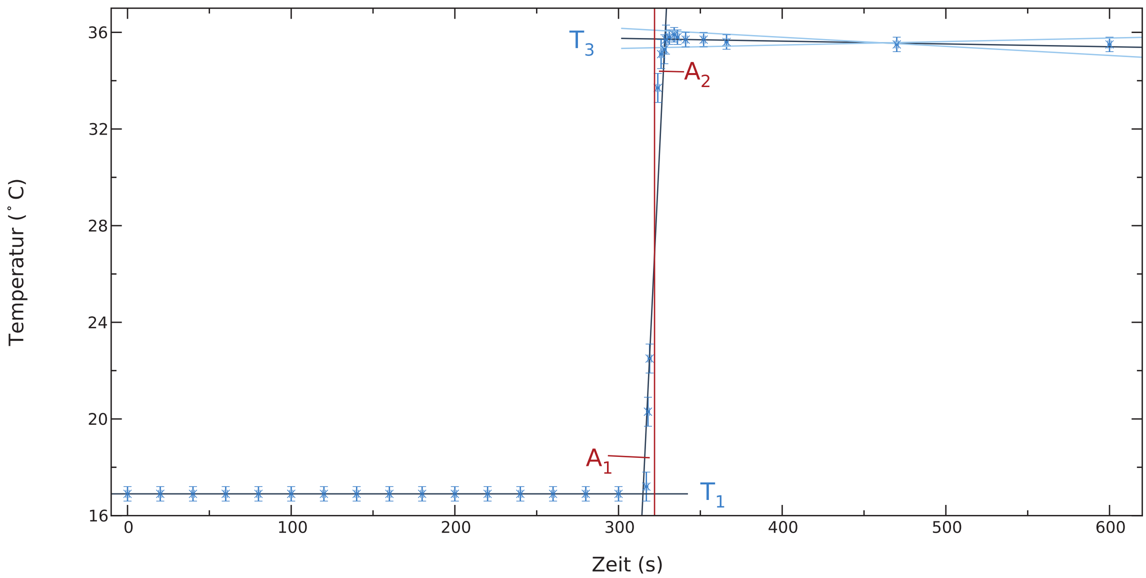

Abbildung 6.1: *Schematische Darstellung eines Temperaturdiagramms mit grafischer Geradenanpassung zur Bestimmung der Mischungstemperatur. Beachten Sie, dass sich dieses Diagramm in mehrfacher Hinsicht von Ihrem unterscheidet. Unter anderem wurden hier nur für den dritten Abschnitt Extremalgeraden erstellt. Im ersten Abschnitt ist hingegen nur der konstante Verlauf nachvollzogen, es wurden hier also nicht die bei Ihnen benötigten Extremalgeraden erstellt.*

Bestimmen Sie zunächst grafisch die Mischungstemperatur T_3. Tragen Sie die gemessenen Temperaturwerte mit Fehlerbalken gegen die Zeit in einem Diagramm auf (Abb. 6.2). Sie sollten einen Verlauf ähnlich Abbildung 6.1 erhalten, wobei sich das Diagramm von Ihrem unterscheiden sollte. Um nun aus Ihrem Diagramm T_1 und T_3 zu bestimmen, erstellen Sie

[1]zu finden unter: `https://www.astro.uni-koeln.de/AP/`

für die Zeitbereiche vor und nach dem Zufügen des kochenden Wassers jeweils Extremalgeraden nach dem Prinzip einer grafischen Geradenanpassung (siehe Abschnitt 8.2.2). Den Temperaturverlauf beim Zugießen des heißen Wassers können Sie mit einer abgeschätzten Gerade nachvollziehen. Platzieren Sie zusätzlich eine senkrechte Linie im Zeitbereich des Mischens, sodass die beiden dreieckigen Flächen A_1 und A_2, welche von senkrechter Linie und den Geraden der Temperaturverläufe eingeschlossen werden, möglichst gleich groß sind. Bei den Schnittpunkten dieser Senkrechten mit den Extremalgeraden der beiden Abschnitte vor und nach dem Zugießen des Wassers lesen Sie jeweils einen minimalen und einen maximalen Wert für T_1 und T_3 ab. Bestimmen Sie die beiden Mittelwerte, um die entsprechenden Temperaturen mit Fehler zu erhalten. Nutzen Sie dazu

$$T_i = \frac{T_i^{\max} + T_i^{\min}}{2} \qquad \& \qquad \Delta T_i = \frac{T_i^{\max} - T_i^{\min}}{2} \qquad \text{für } i = \{1, 3\}.$$

Um die Wärmemenge des Kalorimeters berechnen zu können fehlt noch die Wassermasse des heißen Wassers m_2 mit Fehler (siehe Gl. (4.1) und (4.2)).

Berechnen Sie dann den Wasserwert des Kalorimeters K mit Hilfe von Gleichung (4.3), sowie den Fehler mit Gleichung (4.4). Tragen Sie die Ergebnisse in die unten stehende Tabelle ein. Beachten Sie die vorgegebenen Einheiten.

$T_1^{\min}$ [°C]	$T_1^{\max}$ [°C]
$T_3^{\min}$ [°C]	$T_3^{\max}$ [°C]
T_1 [°C]	ΔT_1 [°C]
T_3 [°C]	ΔT_3 [°C]
m_2 [g]	Δm_2 [g]
K [cal/K]	ΔK [cal/K]

Platz für Nebenrechungen/Notizen/etc.

Abbildung 6.2: *Bestimmung der Mischungstemperatur*

6.2 Bestimmung des Temperaturgefälles im Stab

Zeichnen Sie den Temperaturverlauf im Stab zu vier verschiedenen Zeitpunkten in *ein* Diagramm ein (die erste Messreihe und die Messreihe im stationären Zustand inbegriffen). Tragen Sie dazu die gemessene Thermospannung gegen die Position auf dem Stab auf (Abb. 6.4). Denken Sie daran, die Nullmessung des jeweiligen Thermoelements bei allen Messreihen von Ihren Messwerten zu subtrahieren. Tragen Sie die entsprechend korrigierten Werte in Tabelle 6.1 ein. Zeichen Sie für jede der in Abbildung 6.4 aufgetragenen Messreihen auch eine physikalisch sinnvolle Ausgleichskurve ein (vergleiche Abbildung 6.3). Führen Sie für den stationären Zustand eine Geradenanpassung (entweder grafisch oder rechnerisch) durch. Um die verschiedenen Messreihen zu unterscheiden, empfiehlt sich die Verwendung verschiedenfarbiger Stifte.

Für die Fehler aller korrigierten Thermospannungen in Tabelle 6.1 gilt nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung $\Delta U_i^{\text{korr}} = \sqrt{2} \cdot \Delta U$ für alle $i \in [1, 9]$. Beachten Sie dies bei den Fehlerbalken in Ihrem Diagramm in Abbildung 6.4.

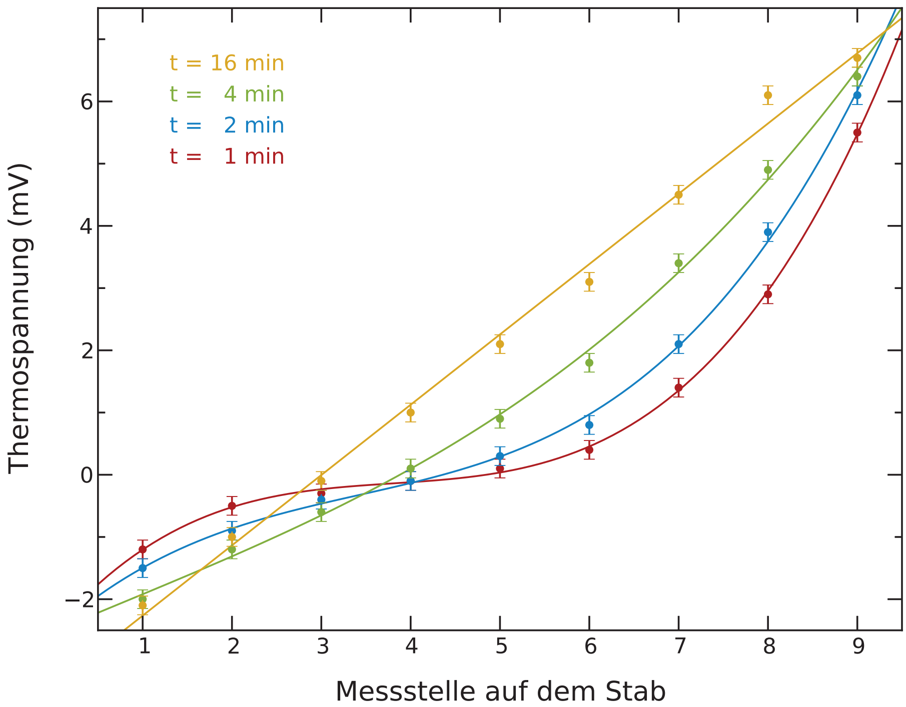

Abbildung 6.3: *Temperaturverlauf im Stab zu verschiedenen Zeitpunkten t. Die Ausgleichskurven enthalten genau einen Wendepunkt und keine lokalen Maxima oder Minima. Für den stationären Zustand wurde eine rechnerische Geradenanpassung durchgeführt.*

	korrigierte Thermospannungen [mV]								
t [min]	U_1^{korr}	U_2^{korr}	U_3^{korr}	U_4^{korr}	U_5^{korr}	U_6^{korr}	U_7^{korr}	U_8^{korr}	U_9^{korr}

Tabelle 6.1: *Um die Nullmessung korrigierte Thermospannungswerte für vier verschiedene Zeitpunkte, einschließlich der ersten Messreihe und dem stationären Zustand, also der letzten Messreihe.*

Geradensteigung des stationären Zustands	
a	Δa

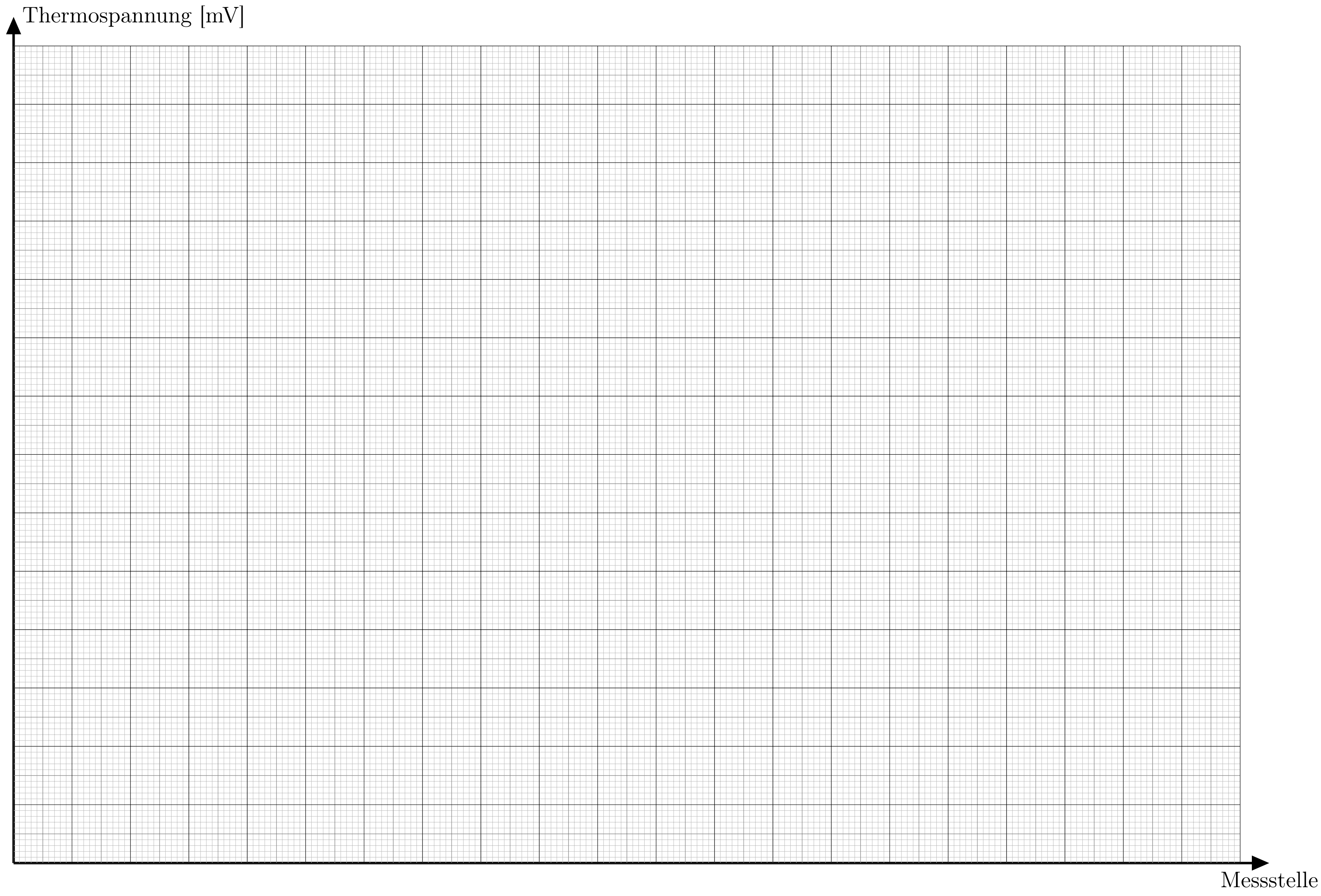

Abbildung 6.4: *Temperaturverlauf im Stab*

6.3 Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Messing (Kupfer)

Um die Wärmeleitfähigkeit des Stabes bestimmen zu können, müssen Sie zuvor die dafür notwendigen Werte berechnen.

Tragen Sie zunächst Ihre Messwerte für den zeitlichen Verlauf der Temperatur des kalten Wassers in ein Diagramm ein (Abbildung 6.5). Bestimmen Sie die Steigung $a = \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}$ der Kurve $T_1(t)$ durch grafische Geradenanpassung.

Geradensteigung Temperaturverlauf	
a_{min} [°C/s]	a_{max} [°C/s]
a [°C/s]	Δa [°C/s]

Bestimmen Sie nun auch die folgenden Größen jeweils mit Fehler, indem Sie die vorgegebenen Gleichungen aus Abschnitt 4 benutzen und die Ergebnisse unter Verwendung geeigneter Zehnerpotenzen in die später vorgegebene Tabelle eintragen. Zu den vorher zu bestimmenden Größen zählen die mittlere Temperatur des kalten Wassers $\overline{T_1}$ nach Gleichung (4.5), der Querschnitt des Stabs q nach Gleichung (4.7) und die gesamte Wärmekapazität der zu erwärmenden Materialien C_{gesamt} nach Gleichung (4.11), wobei Letztere wiederum vom Volumen des Stabfußes V_{M} nach Gleichung (4.9) abhängt. Um die Temperatur des heißen Wassers T_2 zu finden, bilden Sie den Mittelwert $\overline{T_2}$ der entsprechenden Messwerte für diesen Versuchsteil. Berechnen Sie für den Fehler von $\overline{T_2}$ sowohl die Standardabweichung des Mittelwerts als auch den Fehler nach der Fehlerfortpflanzung[2]. Nutzen Sie den größeren der beiden Werte für nachfolgende Rechnungen.

Für die Berechnung von der Wärmekapazität des Stabfußes und somit auch der Wärmekapazität C_{gesamt} benötigen Sie die Dichte ρ_{M} und spezifische Wärmekapazität c_{M} von Messing. Suchen Sie nach Literaturwerten und geben Sie diese in den hier vorgegebenen Einheiten an, wodurch die späteren Rechnungen vereinfacht werden.

ρ_{M} [g / cm^3]	c_{M} [J / (kg K)]
c_{M} umgerechnet $\Rightarrow$	c_{M} [cal / (g K)]

(Quelle(n): ______________________________)

[2]Sowohl die Standardabweichung des Mittelwerts als auch der Fehler nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung hängen von der Anzahl n der für den Mittelwert $\overline{T_2}$ genutzten Messwerte $T_{2,i}$ (mit $i \in [1, n]$) ab. Die Formeln lauten nämlich jeweils $\Delta\overline{T_2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(T_{2,i} - \overline{T_2}\right)^2}$ und $\Delta\overline{T_2} = \frac{\Delta T_2}{\sqrt{n}}$.

Abbildung 6.5: *Zeitlicher Verlauf der Temperatur des kalten Wassers*

Nebenrechnungen/Notizen/etc.

$\overline{T_1}$ [°C]	$\Delta\overline{T_1}$ [°C]
q $[\mathrm{cm}^2]$	Δq $[\mathrm{cm}^2]$
V_M $[\mathrm{cm}^3]$	ΔV_M $[\mathrm{cm}^3]$
C_gesamt [cal / K]	ΔC_gesamt [cal / K]
T_2 [°C]	ΔT_2 [°C]

Geben Sie Ihr Ergebnis der Wärmeleitfähigkeit in den Einheiten $\frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{s\ °C\ cm}}$ und $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s\ K\ m}}$ an.

$\lambda\left[\frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{s\ °C\ cm}}\right]$	$\Delta\lambda\left[\frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{s\ °C\ cm}}\right]$
$\lambda\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s\ K\ m}}\right]$	$\Delta\lambda\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s\ K\ m}}\right]$

7 Diskussion

Entsprechen die Verläufe aller Diagramme Ihren Erwartungen?

Falls nicht, was könnten mögliche Ursachen sein? Welche Fehlerquellen gibt es in diesem Versuch?

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis für die Wärmeleitfähigkeit des Stabes mit Literaturwerten für Messing und Kupfer. Denken Sie daran, die Quellen Ihrer Literaturwerte anzugeben.

gesehen: ________________ ________________________

(Datum) (Unterschrift Versuchsassistenz)

7.1 Literatur

- Fehlerrechnung und allgemeine Hilfen:
  `https://www.astro.uni-koeln.de/AP/`
- Meschede und Gerthsen: Physik, Springer, Berlin, 25. Aufl., 2015
  `https://www.ub.uni-koeln.de/usbportal?query=inst001:6798887`
- Tipler: Physik, Heidelberg, Spektrum, Akad. Verlag, 1994
- Westphal: Physikalisches Praktikum, Vieweg+Teubner

Feedback

Hier ist nach Ihrem Feedback zu dieser Anleitung gefragt. Gibt es etwas, das Sie an der Versuchsanleitung inhaltlich oder technisch ändern würden? Ist beispielsweise etwas nicht oder unzureichend erklärt, Lücken zu klein, etc.? Änderungsvorschläge könnten schon für die nächsten Praktikumsteilnehmer umgesetzt werden.

8 Anhang

8.1 Herleitung Wärmeleitungsgleichung

Die Änderung der Temperatur entlang des Stabes heißt Temperaturgradient, $\operatorname{grad} T = \frac{\Delta T}{\Delta x}$. Durch den Querschnitt q des Stabes fließt ein Wärmestrom I. Dieser ist gegeben durch eine Wärmemenge $\mathrm{d}Q$, die in einer Zeit $\mathrm{d}t$ durch den Stab fließt:

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \lambda q \operatorname{grad} T = \lambda q \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \tag{8.1}$$

Die Proportionalitätskonstante λ bezeichnet die Wärmeleitfähigkeit eines Stoffes, x ist die Position auf dem Stab der Länge l. Sind die Temperaturen der beiden Stabenden konstant, so gilt im stationären Zustand für den Wärmestrom:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda q \left(T_2 - T_1\right)}{l} \tag{8.2}$$

In unserem Fall ändert sich jedoch der Wert von T_1 als Funktion der Zeit t. Daher setzen wir in Gleichung (8.2) $T_1(t)$ für T_1 ein:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda q \left(T_2 - T_1(t)\right)}{l} \tag{8.3}$$

Die pro Zeiteinheit in das kühle Wasser einströmende Wärmemenge $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ erhöht die Temperatur pro Zeiteinheit um

$$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C_{\mathrm{gesamt}}} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \ , \tag{8.4}$$

$$C_{\mathrm{gesamt}} = c_{\mathrm{W}} m_{\mathrm{W}} + K + c_{\mathrm{M}} \rho_{\mathrm{M}} V_{\mathrm{M}} \ .$$

Die Wärmekapazität C_{gesamt} setzt sich zusammen aus der Wärmekapazität des Wassers $c_{\mathrm{W}} m_{\mathrm{W}}$, der Wärmekapazität des Kalorimeters K (Wasserwert) und der Wärmekapazität des Stabfußes $c_{\mathrm{M}} m_{\mathrm{M}} = c_{\mathrm{M}} \rho_{\mathrm{M}} V_{\mathrm{M}}$. Dabei bezeichet $c_{\mathrm{W/M}}$ die spezifische Wärmekapazität von Wasser bzw. Messing, $m_{\mathrm{W/M}}$ die entsprechende Masse, ρ_{M} die Dichte von Messing und V_{M} das Volumen des Stabfußes. Auflösen von Gleichung (8.4) nach $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ und Einsetzen in (8.3) liefert:

$$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda q \left(T_2 - T_1(t)\right)}{l C_{\mathrm{gesamt}}} \tag{8.5}$$

Während der Messung ändert sich $T_1(t)$ vom Anfangswert T_{Anfang} bis zum Endwert T_{Ende} nur wenig. Daher kann $T_1(t)$ in guter Näherung durch den Mittelwert $\overline{T_1} = \frac{1}{2}\left(T_{\mathrm{Anfang}} + T_{\mathrm{Ende}}\right)$ ersetzt werden. In dieser Näherung ist

$$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda q \left(T_2 - \overline{T_1}\right)}{l C_{\mathrm{gesamt}}} \tag{8.6}$$

konstant. Die Temperatur steigt folglich linear mit der Zeit an.

8.2 Methoden

8.2.1 Gaußsche Fehlerfortpflanzung

Die Gaußsche Fehlerfortpflanzung beschreibt den Einfluss fehlerbehafteter Größen x_i auf die Ungenauigkeit einer sich aus diesen zusammensetzenden Größe y. Als ein verallgemeinertes Beispiel ist der Wert von y mit dessen Ungenauigkeit Δy zu bestimmen. Der Wert y hängt von mehreren anderen Größen x_i ab, $y\,(x_1, x_2, x_3, \ldots)$.

Alle Größen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ besitzen jeweils eine Ungenauigkeit $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots$. Dann ergibt sich Δy aus

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_3}\Delta x_3\right)^2 + \ldots},$$

wobei die Brüche $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ partiellen Ableitungen von y nach einer Größe x_i entsprechen.

Ein Beispiel:
Um die Geschwindigkeit $v = \frac{l}{t}$ eines Fahrzeugs in einer Tempo 30-Zone zu bestimmen wird die Zeit t gestoppt, welche es für eine Strecke l benötigt. Beide Werte liegen vor: $l = (20{,}0 \pm 0{,}5)\,\mathrm{m}$ und $t = (2{,}2 \pm 0{,}2)\,\mathrm{s}$, also $v = \frac{20{,}0\,\mathrm{m}}{2{,}2\,\mathrm{s}} \approx 9{,}0909\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
Die Fehlerformel lautet hier

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial l}\Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{t}\Delta l\right)^2 + \left(-\frac{l}{t^2}\Delta t\right)^2} \qquad (8.7)\\
&= \sqrt{\left(\frac{l}{t}\cdot\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{l}{t}\cdot -\frac{\Delta t}{t}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{l}{t}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + (-1)^2\cdot\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2\right)} \\
&= v \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}. \qquad (8.8)
\end{aligned}$$

Die Umformungen bis Gleichung (8.8) sind als generelle Vorlage zu verstehen, verglichen mit Gleichung (8.7) ist in diesem Beispiel keine starke Vereinfachung zu beobachten. In einigen Fällen ist dieses Schema jedoch sehr sinnvoll, insbesondere wenn dadurch lange Formeln letztendlich stark gekürzt werden. Allerdings ist zu beachten, dass es nicht auf alle Formeln anwendbar und somit jeder Fall einzeln abzuwägen ist.

Hier ergibt sich durch Einsetzen der Werte $\Delta v \approx 0{,}857\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 0{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Gerundet und mit umgerechneten Einheiten ist letztendlich $v \pm \Delta v = (9{,}1 \pm 0{,}9)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx (33 \pm 3)\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

8.2.2 Grafische Geradenanpassung

Bei einer grafischen Geradenanpassung werden die Parameter $a \pm \Delta a$ und $b \pm \Delta b$ einer Geradengleichung der Form $y = y(x) = a \cdot x + b$ bestimmt. Die Bestimmung der Werte erfolgt anhand der Auftragung mehrerer Wertepaare $(x_i | y_i)$ und deren Ungenauigkeiten Δx_i und/oder Δy_i in einem Diagramm, in welchem die Werte einem möglichst linearen Verlauf entsprechen. Falls nur jeweils die x_i- oder die y_i-Werte Ungenauigkeiten besitzen, sind die entsprechenden Fehlerbalken im Diagramm zu beachten. Sollten Ungenauigkeiten beider Größen vorliegen[1], sind die entsprechenden Fehlerflächen relevant.

Ein essentieller Schritt dieser Geradenanpassung ist die Findung von den zwei sogenannten Extremalgeraden, also einer Geraden mit möglichst kleiner und einer mit möglichst großer Steigung, welche beide gewissen Regeln unterliegen:

1. Die Gerade schneidet $^2/_3$ aller Messwerte in deren Fehlerbereichen.
2. Die restlichen Messwerte sind nicht weiter als der doppelte Fehlerabstand von der Geraden entfernt.

Es kommt vor, dass die zweite Regel nicht ganz erfüllt werden kann. Falls möglich sollte jedoch darauf geachtet werden. Dabei ist zu beachten, dass die Geraden unabhängig voneinander erstellt werden. Die Gerade maximaler Steigung kann durchaus andere Werte schneiden, als die Gerade minimaler Steigung. Häufig lassen sich nur so die wirklich größte und kleinste Steigung finden.
Wenn die Punkte im Diagramm eine deutliche Abweichung von den erforderlichen Regeln benötigen würden ist die Überlegung notwendig, ob eine rechnerische Geradenanpassung nicht sinnvoller wäre. Sollten nur einzelne Werte deutlich sichtbar aus dem linearen Verlauf fallen, so können diese ausgeklammert und mit zusätzlicher Begründung als Ausreißer unbeachtet bleiben.
Um die Extremalgeraden zu finden ist es sinnvoll beispielsweise ein langes Lineal an das Diagramm zu halten, um mehrere potentielle Geraden mit minimaler/maximaler Steigung auszuprobieren.

Im nächsten Schritt werden die Steigungswerte der Extremalgeraden $a_{\mathrm{min/max}}$ und die y-Achsenabschnitte $b_{\mathrm{min/max}}$ bestimmt. Damit die relativen Fehler klein ausfallen, sind dem Diagramm entsprechend möglichst große Steigungsdreiecke einzuzeichnen. An diesen werden dann unter Beachtung der Achsenskalierung die jeweiligen Δx und Δy abgelesen. Dabei ist zu beachten, dass es sich hier nicht um Ungenauigkeiten, sondern Differenzen, handelt. Die Steigungen der Extremalgeraden ergeben sich aus $a = \pm\frac{\Delta y}{\Delta x}$, wobei das Vorzeichen dadurch bestimmt ist, ob die jeweilige Gerade steigend $(+)$ oder fallend $(-)$ ist. Sollte eine Achse entgegen der Norm invertiert beschriftet sein, ist dies natürlich bei der Vorzeichenwahl zu berücksichtigen.
Die Werte $b_{\mathrm{min/max}}$ können entweder direkt im Diagramm abgelesen werden oder müssen mittels der Geradensteigung und einem Punkt auf der Geraden mit Hilfe der umgestellten Geradengleichung $b_{\mathrm{min/max}} = y - a_{\mathrm{min/max}} \cdot x$ bestimmt werden.

[1] In der realen Anwendung kann es auch vorkommen, dass Ungenauigkeiten so klein ausfallen, dass sie nicht sinnvoll im Diagramm dargestellt werden können. Dies gleicht effektiv dem Fall, dass nur von der jeweils anderen Größe Ungenauigkeiten vorliegen.

Zuletzt wird die Ausgleichsgerade bestimmt, indem die vorherigen Geradenparameter einfach gemittelt werden. Die Ungenauigkeiten der entsprechenden Mittelwerte bauen somit jeweils auf nur zwei Werten auf, wodurch sich die Formel der Standardabweichung des Mittelwerts stark vereinfacht:

$$\begin{aligned} a &= \frac{a_{\text{max}} + a_{\text{min}}}{2} & \& \qquad \Delta a &= \frac{a_{\text{max}} - a_{\text{min}}}{2}, \\ b &= \frac{b_{\text{max}} + b_{\text{min}}}{2} & \& \qquad \Delta b &= \left| \frac{b_{\text{max}} - b_{\text{min}}}{2} \right|. \end{aligned}$$

Anmerkung: Allgemein müssten auch bei Δa Betragsstriche stehen. Da a_{min} und a_{max} jedoch in einer festen Relation stehen, ergibt sich für Δa automatisch ein positiver Wert.

Würde diese Gerade im Diagramm eingezeichnet werden, sollte sie die beiden Extremalgeraden genau mittig schneiden.

Ein Beispiel:

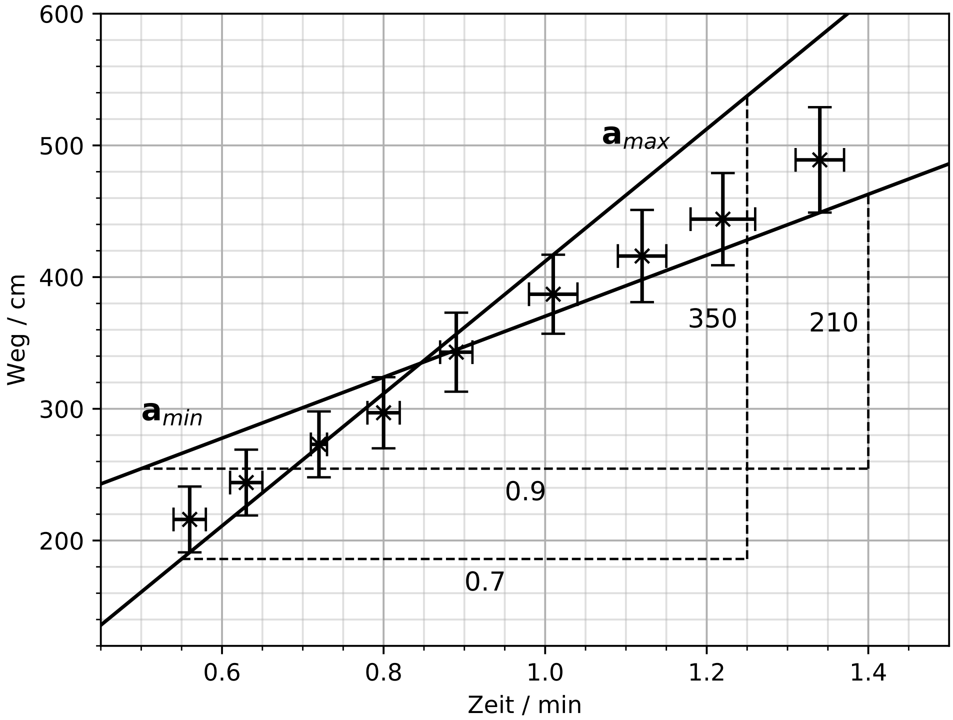

Abbildung 8.1: *Vollständige grafische Geradenanpassung. Extremalgeraden und Steigungsdreiecke sind eingezeichnet und beschriftet. Dazugehörige Rechnungen befinden sich im Text.*

In Abbildung 8.1 ist eine grafische Geradenanpassung mit neun Werten eines fiktiven Experiments und deren Ungenauigkeiten aufgetragen. Es ist die zu den Daten gehörige Geschwindigkeit $v \pm \Delta v$ in $^{\text{m}}/_{\text{s}}$ gesucht.
Die Extremalgeraden werden jeweils durch das Schneiden von sechs Werten und deren Fehlerbalken/-flächen bestimmt, während die übrigen drei Werte möglichst noch im dop-

pelten Fehlerabstand getroffen sind. Zur Berechnung der Steigungswerte werden die Steigungsdreiecke benutzt, also im Beispiel hier

$$a_{\min} = \frac{210\,\mathrm{cm}}{0{,}9\,\mathrm{min}} \approx 233{,}33\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}} \qquad \& \qquad a_{\max} = \frac{350\,\mathrm{cm}}{0{,}7\,\mathrm{min}} = 500\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}}.$$

Da beide Geraden von links nach rechts steigen, haben sie positive Steigungswerte. Die y-Achsenabschnitte der beiden Extremalgeraden lassen sich in diesem Fall nicht einfach aus dem Diagramm ablesen und müssen somit berechnet werden. Indem nun ein beliebiger Punkt einer Gerade zusammen mit der jeweiligen Steigung verwendet wird, lassen sich die gesuchten Werte finden. Für dieses Beispiel wird für $a_{\min}$ bei $x = 0{,}6\,\mathrm{min}$ und für $a_{\max}$ bei $x = 1{,}3\,\mathrm{min}$ geschaut, sodass sich die beiden Punkte $(0{,}6\,|\,280)$ und $(1{,}3\,|\,560)$ ergeben. Die y-Achsenabschnitte sind dann

$$\begin{aligned} b_{\min} &= 280\,\mathrm{cm} - 233{,}33\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}} \cdot 0{,}6\,\mathrm{min} &&\approx 140\,\mathrm{cm}, \\ b_{\max} &= 560\,\mathrm{cm} - 500\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}} \cdot 1{,}3\,\mathrm{min} &&= -90\,\mathrm{cm}. \end{aligned}$$

Nun gilt es noch die oben genannten Formeln für $a \pm \Delta a$ und $b \pm \Delta b$ anzuwenden und es ergibt sich

$$a \pm \Delta a = (366{,}665 \pm 133{,}335)\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}} \qquad \& \qquad b \pm \Delta b = (25 \pm 115)\,\mathrm{cm}.$$

Es ist wichtig zu beachten, dass die Steigungswerte nicht der gewünschten Angabe von Ergebnissen entspricht, da die Ergebnisse hier nicht signifikant gerundet sind! Diese genaueren Werte werden genutzt, um weitere Rechnungen durchzuführen, in diesem Fall also die Umrechnung in die gewünschten Einheiten.
Durch Umrechnung der Steigunsgwerte ergibt sich für die gesuchte Geschwindigkeit $v \approx (6{,}111 \pm 2{,}222) \cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, also gerundet $v = (6{,}1 \pm 2{,}2) \cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.