I. Physikalisches Institut
Universität zu Köln

W07: Wärmeausdehnung

Praktikum A für Nebenfächler

Version vom 9. Oktober 2023

Abzugeben bis: ____________________

Assistent: ____________________

Gruppenmitglieder: ____________________

____

____

Wichtige Informationen

Zur Bearbeitung ist es zwingend erforderlich, dass Sie sich mit den Grundlagen der Fehlerrechnung (u. a. Gaußsche Fehlerfortpflanzung, (gewichteter) Fehler des Mittelwerts, grafische Geradenanpassung) vertraut machen. Informationen dazu finden Sie beispielsweise im Dokument „allgemeine Hilfen für das Praktikum A“ auf der Webseite des A-Praktikums[a].

Aufgrund des Umfangs dieses Versuchs ist es nötig die Blätter mittels Schnellhefter o. ä. zu binden. Bitte lochen Sie die Blätter und heften Sie diese sorgfältig ein. Sollte die Form der Abgabe nicht den Regularien entsprechen, kann die*der Assistent*in die Annahme der Auswertung verweigern.

Versuchen Sie innerhalb der vorgegebenen Lücken zu bleiben. Diese geben ungefähr den an entsprechender Stelle erwarteten Umfang vor. Sollte der Platz dennoch nicht ausreichen, fügen Sie ganze Blätter ein, auf welchen deutlich markiert ist, was wozu gehört.

Beachten Sie bitte, dass alle entsprechenden Lücken und Fragestellungen ausgefüllt und beantwortet werden müssen. Insbesondere sind Lücken bis hin zum Messprotokoll bereits vor dem Versuchstag zu bearbeiten. Dies müssen Sie vor Ort nachweisen und wichtige Inhalte frei wiedergeben können. Es wird davon ausgegangen, dass alle Gruppenmitglieder die vollständige Anleitung durchgelesen und verstanden haben. Sollten Sie am Versuchstag nicht ausreichend auf den Versuch vorbereitet sein, wird die*der Assistent*in Sie nicht am Versuch teilnehmen lassen.

Die Abgabe muss alle Seiten umfassen, insbesondere aber Seiten mit auszufüllenden Lücken. Dazu gehören in jedem Fall die Titelseite, die Vorbereitung, das Messprotokoll und die Auswertung mit Diskussion.

Alle auf dem Deckblatt aufgeführten Gruppenmitglieder sind für die Bearbeitung und fristgerechte Abgabe des Versuchsberichts bzw. dessen erforderlichen Korrekturen zuständig und verantwortlich. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass Sie sich mit den Regeln des A-Praktikums[a] vertraut gemacht haben.

[a] zu finden unter: `https://www.astro.uni-koeln.de/AP/`

Es ist nicht notwendig den Anhang mit auszudrucken. Allerdings kann dieser gerade bei Detailfragen enorm weiterhelfen und soll durchgelesen und verstanden sein.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Dieser Versuch befasst sich mit dem Phänomen der Wärmeausdehnung von Festkörpern. Wie Sie aus dem Alltag wissen, dehnen sich Stoffe unter Wärme aus und ziehen sich bei Kälte zusammen. Daher werden beispielsweise elektrische Oberleitungen nicht straff gespannt, sondern durchhängend verlegt, damit sie im Winter nicht reißen. Bei dem Bau von Brücken wird durch den Einsatz von Dehnungsfugen verhindert, dass das Bauwerk bei Temperaturänderungen beschädigt wird.

Die physikalische Größe, mit der die thermische Ausdehung beschrieben wird, heißt Ausdehnungskoeffizient. Je größer der Ausdehungskoeffizient eines Stoffes ist, desto stärker dehnt er sich mit Erhöhung der Temperatur aus. Diese Eigenschaft wird z. B. häufig in Thermometern ausgenutzt. Im Allgemeinen ist auch der Ausdehnungskoeffizient selbst abhängig von der Temperatur und kann nur in kleinen Temperaturbereichen als konstant angesehen werden.

2 Vorbereitung (vor dem Praktikum, zu Hause)

- Ein Festkörper ist im festen Aggregatzustand. Die Kräfte, welche die Atome im Körper an ihren Lagen halten, werden __________________________ gennant. Im Gegensatz zu Flüssigkeiten und Gasen ist eine hohe Verformungsarbeit erforderlich, um die Form von diesen Körpern zu ändern. Des Weiteren leisten Festkörper, wie auch Flüssigkeiten, großen Widerstand gegenüber einer Volumenänderung, welche bei Gasen deutlich einfacher zu erreichen ist. Bei Festkörpern wird zwischen amorphen und kristallinen Eigenschaften unterschieden. Eine __________________ Substanz weist im Nahbereich eine gewisse Ordnung auf, es fehlt jedoch an einer __________________________ Struktur.
  Nennen Sie mindestens zwei Beispiele für amorphe Substanzen:

  ____

  Im Gegensatz dazu sind die Bausteine eines _____________________ Stoffes periodisch angeordnet und weisen eine entsprechende übergeordnete Struktur auf.

- Ein harmonischer Oszillator ist ein schwingungsfähiges System mit einer linearen __________________________. Entsprechend ist die Kraft _____________________ zur Auslenkung des Systems. Das Potenzial V eines eindimensionalen harmonischen Oszillators kann grafisch in Form einer _____________________ dargestellt werden. Die dazugehörige Formel mit der Rückstellkonstanten k lautet $V(x) =$_____________. Es gilt allgemein k ___ 0. In der Realität ist jedoch meist ein asymmetrisches Potenzial gegeben (siehe Abbildung 2.1).

- Die Bausteine eines Festkörpers, also dessen Atome, schwingen aufgrund ihrer thermischen Energie in einem Potenzialtopf um die Ruhelage. Mit steigender Temperatur steigt die _____________________ und _____________________ Energie dieser. Der

Schwingungsmittelpunkt wandert in Abbildung 2.1 entsprechend zur ______________ Seite, also zu größeren mittleren Abständen der Bausteinen. Daher dehnt sich die

Materie aus. Es findet eine temperaturabhängige, also eine ____________________, Expansion statt. Eine solche Temperaturabhängigkeit der Ausdehnung lässt sich nicht mit einer symmetrischen Potenzialkurve erklären. Dazu wird ein asymmetrisches Potenzial benötigt.

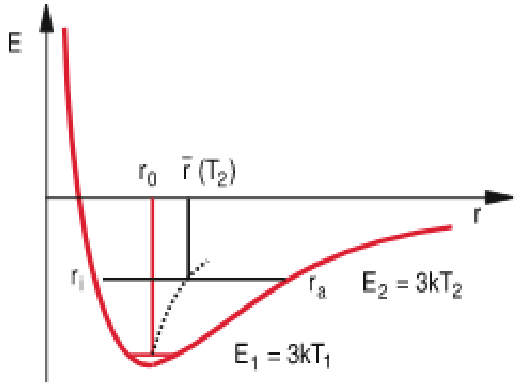

Abbildung 2.1: *Thermische Ausdehnung infolge des Wechselwirkungspotenzials zwischen zwei Atomen des Kristallgitters. Die temperaturabhängige Änderung des mittleren Abstands ist durch die gestrichelte Linie angedeutet. (Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme, Demtröder, W., 2018)*

- Bei fast allen Festkörpern beobachtet man eine ____________________ mit steigender Temperatur. In einem beschränkten Temperaturbereich ist die Länge $L(T)$ ei-

  nes Festkörpers in guter Näherung ____________________ zur Temperaturänderung $\Delta T = T - T_0$:

$$L(T) = L_0(1 + \alpha \Delta T), \tag{2.1}$$

wobei L_0 die Ausgangslänge des Körpers bei der Temperatur T_0 und α der lineare Ausdehnungskoeffizient des Stoffes ist.
Umformen nach α ergibt:

$$\alpha = \frac{1}{L_0} \frac{L(T) - L_0}{\Delta T} = \frac{1}{L_0} \frac{\Delta L}{\Delta T}. \tag{2.2}$$

Festkörper dehnen sich bekanntlich nicht nur in einer Raumrichtung aus, sondern auch

im _______________.

$$V(T) = V_0(1 + \gamma \Delta T), \tag{2.3}$$

wobei V_0 das Volumen des Körpers bei der Temperatur T_0 ist, also eine Analogie zu L_0 im eindimensionalen Fall. Der Volumenausdehnungskoeffizient γ ist für kleine Temperaturänderungen näherungsweise gegeben durch $\gamma = 3 \cdot \alpha$.

- Die Näherung $\gamma = 3 \cdot \alpha$ lässt sich leicht veranschaulichen, indem von einem kubischen, isotropen Körper ausgegangen wird. Das Volumen ist dann gegeben durch $V(T) = (L(T))^3 = L_0^3(1 + \alpha\Delta T)^3$, wobei $V_0 = L_0^3$. Ausmultiplizieren des Terms $(1 + \alpha\Delta T)^3$ ergibt:

  $(1 + \alpha\Delta T)^3 =$ ____

  Dadurch, dass die Werte von α sehr klein sind (häufig in der Größenordnung von einem Millionstel, also 10^{-6}), können die __________________________ Terme von α im obigen Ergebnis in sehr guter Näherung vernachlässigt werden, da sie gegenüber dem linearen Term um ein vielfaches ______________ sind. Es gilt somit $\gamma \approx 3 \cdot \alpha$.

- Nennen Sie drei Methoden der Temperaturmessung:

  - ____

  - ____

  - ____

3 Versuchsaufbau und -beschreibung

Wir betrachten einen Stab, der schrittweise erwärmt wird. Die Längenänderung des Stabes, verursacht durch die Temperaturänderung, hängt von dem linearen Ausdehungskoeffizienten des Stabes im betrachteten Temperaturbereich ab. Aufgabe ist es, diesen Ausdehnungskoeffizienten für zwei Stäbe aus unterschiedlichen Materialien zu messen.

Dazu benutzen wir folgende Anordnung (siehe Abb. 3.1): Der jeweilige Probenstab ist hohl und auf einer Seite fest in einen Träger eingespannt, während sich auf der anderen Seite des Stabes ein Gleitlager befindet. Der Stab wird von einer temperierten Flüssigkeit (Wasser) durchflossen. Dadurch erwärmt sich der Stab, dehnt sich aus und drückt gegen eine Mikrometer-Messuhr, auf der die Längenänderung abgelesen werden kann (siehe Abb. 3.2). Die Flüssigkeit, die durch den Stab geleitet wird, entnimmt die dazu verwendete Umwälzpumpe einem Reservoir. Die Temperatur der im Reservoir befindlichen Flüssigkeit kann durch einen Thermostatregler eingestellt werden (siehe Abb. 3.3). Die Erwärmung der Flüssigkeit erfolgt über eine elektrische Heizung; Abkühlung erfolgt mit Hilfe einer Wärmetauschspirale, die dazu mit kaltem Kühlwasser versorgt werden muss. Die Temperatur des Wasserbades wird mit einem Thermometer gemessen, das durch ein Loch im Deckel des Reservoirs gesteckt ist.

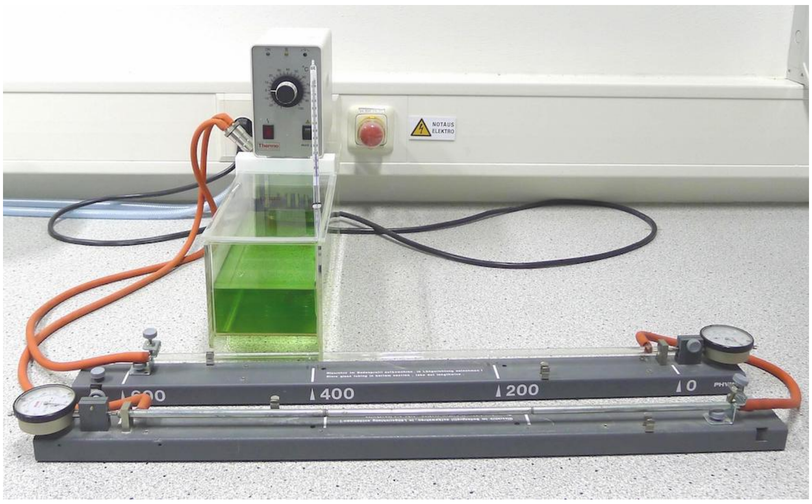

Abbildung 3.1: *Bild des Versuchsaufbaus.*

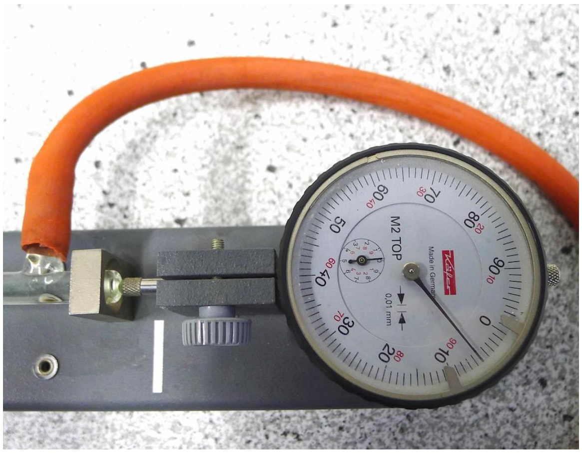

Abbildung 3.2: *Mikrometer-Messuhr zur Bestimmung der Längenänderung des Stabes. Die kleinste Differenz zwischen zwei Skalierungsmarken beträgt 10 μm. Der obere Ring der Messuhr kann vorsichtig gedreht werden, um den Zeiger zu Beginn der Messung auf Null zu stellen.*

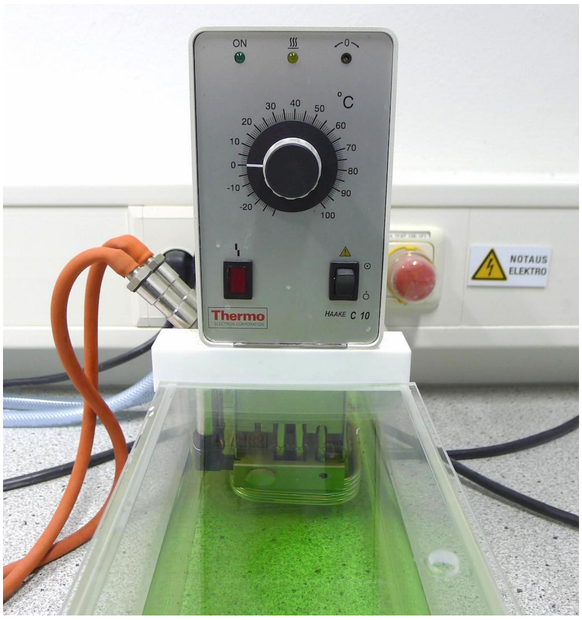

Abbildung 3.3: *Foto des Thermostatreglers mit integrierter Umwälzpumpe (Schalter rechts) und elektrischer Heizung (rote Anzeige).*

4 Durchführung (im Praktikum)

Die Längenausdehnung zweier unterschiedlicher Stäbe soll im Temperaturbereich zwischen $30\,^\circ\mathrm{C}$ und $60\,^\circ\mathrm{C}$ in $3\,^\circ\mathrm{C}$–Schritten vermessen werden. Je nach Aufbau handelt es sich um jeweils zwei der drei Materialien Eisen, Messing und Glas. Beide Stäbe sind jeweils so in den Aufbau integriert, dass das heiße Wasser nacheinander durch beide Stäbe gepumpt wird. Auf diese Weise kann die Längenänderung beider Materialien gleichzeitig gemessen werden.

Stellen Sie das Thermostat zu Beginn der Messung auf $30\,^\circ\mathrm{C}$. Die Temperatur des Wasserbades wird am dort eingetauchten Thermometer abgelesen. Wenn sich bei $30\,^\circ\mathrm{C}$ die Länge der Stäbe stabilisiert hat, stellen Sie die Mikrometermessuhren jeweils durch vorsichtiges Drehen des äußeren Rings auf Null. Dies sind die Startwerte Ihrer Messreihe.

Erhöhen Sie nun die Temperatur schrittweise um $3\,^\circ\mathrm{C}$ und protokollieren Sie jeweils die Längenänderungen der beiden Stäbe. Achten Sie darauf bei jeder Temperaturänderung so lange zu warten, bis sich zum einen die Temperatur und zum anderen die Stablängen stabilisiert haben.

Schätzen Sie die Fehler für Ihre Temperatur- und Längenmessung ab und tragen Sie diese zusammen mit der anfänglichen Stablänge L_0 in das Messprotokoll 4.1 ein. Die meisten Stablängen sind gleich, wobei $L_0 = (600 \pm 1)\,\mathrm{mm}$ entspricht, mit Ausnahme des Glasstabs, welcher mit $L_{0,\mathrm{Glas}} = (570 \pm 1)\,\mathrm{mm}$ ein wenig kürzer ist.

Allgemeine Hinweise:

Um Verbrennungen zu vermeiden, achten Sie bitte darauf, eine maximale Temperatur des Wasserbades von $60\,^\circ\mathrm{C}$ nicht zu überschreiten.

Der integrierte Wärmetauscher des Umwälz-Thermostats dient dazu, das Wasserbad für eine weitere Messung abzukühlen. Dazu muss der Temperaturregler am Thermostaten herunter gedreht und die Leitungswasserzufuhr geöffnet werden. Die Abkühlung dauert etwa 10 – 15 Minuten. Da Sie die Messreihen für beide Stäbe gleichzeitig ausführen können, ist diese Prozedur im Allgemeinen nicht erforderlich.

Es sollte sich so viel Wasser im Reservoir befinden, dass die Pumpe ruhig läuft und keine Luft zieht. Sollte zu wenig Wasser vorhanden sein, verständigen Sie bitte Ihren Assistenten. Es darf nur destilliertes Wasser zum Nachfüllen verwendet werden, kein Leitungswasser. Die Abdeckung auf dem Wasserbad soll Verschmutzungen minimieren und verhindern, dass zu viel Flüssigkeit beim Erwärmen verdampft.

Bitte gehen Sie pfleglich mit dem Versuchsaufbau um! Lehnen Sie sich nicht auf die Stäbe – insbesondere der Glasstab ist sehr zerbrechlich. Achten Sie darauf, das im Wasserbad steckende Thermomenter nicht versehentlich abzuschlagen.

Temperatur T / °C	Längenänderung ΔL / µm	
	Material 1: ______________________	Material 2: ______________________
	Anfangslänge $L_0 \pm \Delta L_0$ / mm	
	$\pm$	$\pm$

Messungenauigkeiten:	
Temperatur ΔT / °C	Längenänderung $\Delta(\Delta L)$ / µm

Tabelle 4.1: *Messprotokoll: Anfangslängen & Längenänderungen zweier Materialien in Abhängigkeit der Temperatur inkl. ihrer Ungenauigkeiten.*

AT: ______________________ ______________________________________

(Datum) (Unterschrift Versuchsassistenz)

5 Auswertung (zu Hause)

In diesem Abschnitt werten Sie Ihre Messwerte aus. Folgen Sie dazu den nachfolgenden Anweisungen und füllen Sie die entsprechenden Stellen aus. Allgemeine Hinweise zu den hier benötigten Fehlerrechnungen finden Sie auch im Anhang in Abschnitt 8. Beachten Sie die korrekte Angabe von Ergebnissen, wozu das Runden bis auf signifikante Stellen zählt.

5.1 Grafische Geradenanpassung

Tragen Sie die gemessenen Längenänderungen beider Stäbe jeweils als Funktion der Temperatur in den nachfolgenden Diagrammen auf. Führen Sie zu beiden Messreihen jeweils eine grafische Geradenanpassung durch. Erstellen Sie dazu entsprechende Extremalgeraden und denken Sie daran große Steigungsdreiecke einzuzeichnen. Die Rechnungen zu den grafischen Geradenanpassungen führen Sie mit Hilfe der entsprechenden Lücken nach den beiden Diagrammen durch.

Hilfe zum generellen Vorgehen bei grafischen (und rechnerischen) Geradenanpassungen finden Sie im Anhang dieses Dokumentes oder auch bei den allgemeinen Hilfsdokumenten auf der Webseite des Praktikum A[1].

[1] https://www.astro.uni-koeln.de/AP/

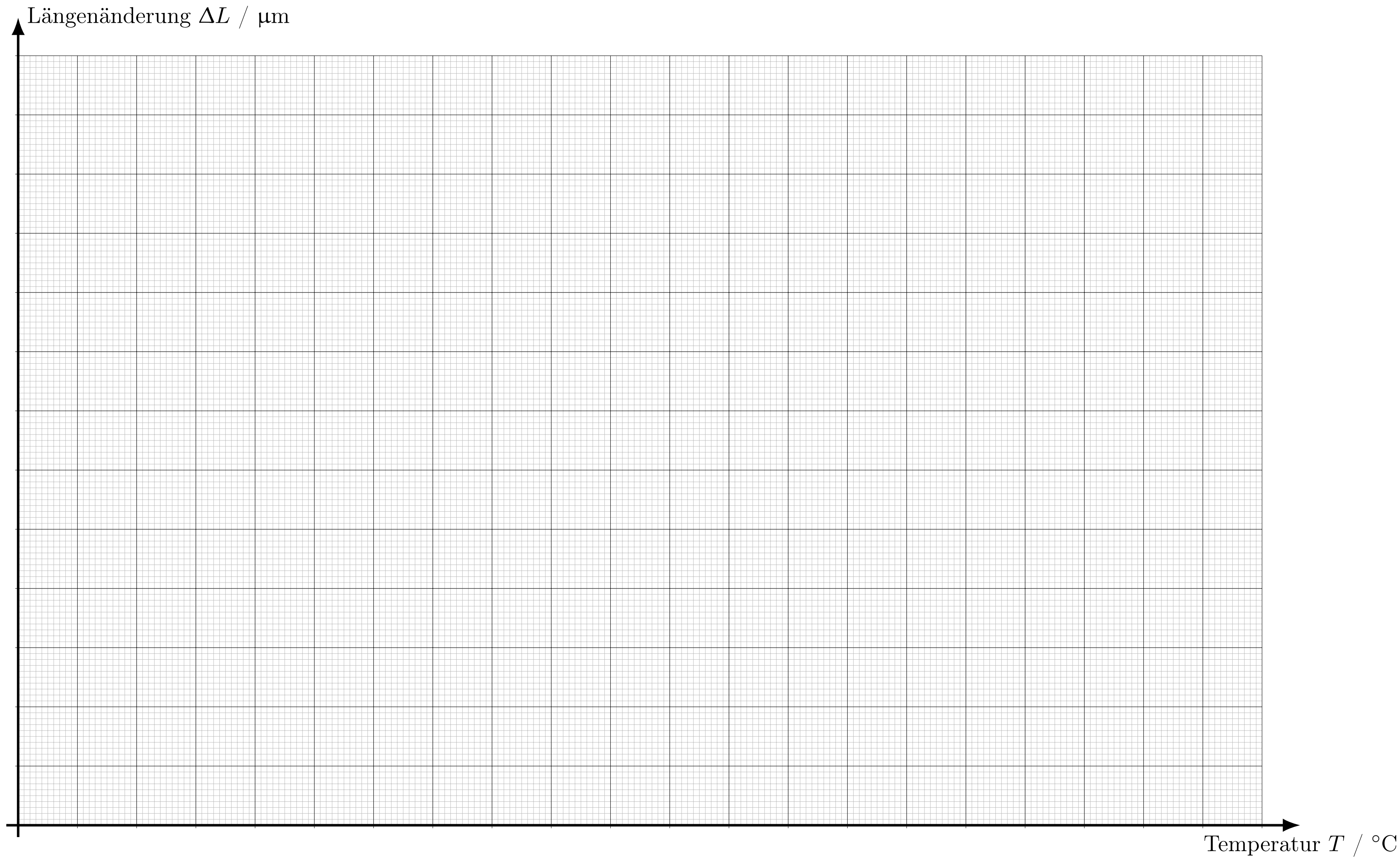

Abbildung 5.1: *Längenausdehnung von ______________________ in Abhängigkeit der Temperatur.*
(Material 1)

Abbildung 5.2: *Längenausdehnung von ____________________ in Abhängigkeit der Temperatur.*
(Material 2)

Rechnungen zu den grafischen Geradenanpassungen

In diesem Fall sind nur die Steigungeswerte von Interesse, die y-Achsenabschnitte können daher hier ignoriert werden. Welche Einheit haben die Steigungswerte? $[a] =$ ______________

Füllen Sie die folgenden Lücken aus, um die Steigungswerte und deren Ungenauigkeiten herauszufinden[2].

Material 1: ____________________

$$a_{\text{min}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\qquad\qquad}{} = \underline{\qquad\qquad} \qquad a_{\text{max}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\qquad\qquad}{} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\Rightarrow \qquad a = \frac{a_{\text{max}} + a_{\text{min}}}{2} = \underline{\qquad\qquad} \qquad \Delta a = \frac{a_{\text{max}} - a_{\text{min}}}{2} = \underline{\qquad\qquad}$$

Material 2: ____________________

$$a_{\text{min}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\qquad\qquad}{} = \underline{\qquad\qquad} \qquad a_{\text{max}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\qquad\qquad}{} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\Rightarrow \qquad a = \frac{a_{\text{max}} + a_{\text{min}}}{2} = \underline{\qquad\qquad} \qquad \Delta a = \frac{a_{\text{max}} - a_{\text{min}}}{2} = \underline{\qquad\qquad}$$

5.2 Rechnerische Geradenanpassung

Führen Sie zusätzlich für beide Messreihen jeweils eine rechnerische Geradenanpassung nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate durch. Hinweise zum Vorgehen dabei finden Sie um zuvor erwähnten Dokument oder im Anhang in Abschnitt 8.2.

Übertragen Sie die Notation aus dem Anhang auf die Datenpunkte hier. Welche Größe entspricht dann x, welche y?

$$x \mathrel{\widehat{=}} \underline{\qquad\qquad} \qquad \& \qquad y \mathrel{\widehat{=}} \underline{\qquad\qquad}$$

Füllen Sie Tabellen 5.1 und 5.2 aus. Beachten Sie erneut den sinnvollen Einsatz von Zehnerpotenzen. Welche Einheiten ordnen Sie den einzelnen Größen zu?

$$[x] = \underline{\qquad\quad} \quad ; \quad [y] = \underline{\qquad\quad} \quad ; \quad [a] = \underline{\qquad\quad} \quad ; \quad [b] = \underline{\qquad\quad}$$

[2] Im allgemeinen Fall müssten für die Ungenauigkeit Betragsstriche verwendet werden. Da hier jedoch a_{min} und a_{max} in einer eindeutigen Relation stehen, ergeben sich für die Ungenauigkeiten mit den angegebenen Formeln automatisch positive Werte.

Material:				
Messung i	x_i	x_i^2	y_i	$x_i y_i$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
$\sum_i$				

$\Rightarrow$	Δ		a		b	

Messung i	$y(x_i) = a \cdot x_i + b$	$y(x_i) - y_i$	$(y(x_i) - y_i)^2$
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
$\sum_i$			

$\Rightarrow$	$(\Delta y)^2$		Δa		Δb	

Tabelle 5.1: *Rechnerische Geradenanpassung für Material 1:* ______________________.

Material:				
Messung i	x_i	x_i^2	y_i	$x_i y_i$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
$\sum_i$				

$\Rightarrow$	Δ		a		b	

Messung i	$y(x_i) = a \cdot x_i + b$	$y(x_i) - y_i$	$(y(x_i) - y_i)^2$
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
$\sum_i$			

$\Rightarrow$	$(\Delta y)^2$		Δa		Δb	

Tabelle 5.2: *Rechnerische Geradenanpassung für Material 2:* ______________________.

5.3 Linearer Ausdehnungskoeffizient

Bestimmen Sie den linearen Ausdehnungskoeffizienten für jeden Stab aus der jeweils gültigen Stablänge L_0 und der Steigung der Regressionsgeraden.

Der lineare Ausdehnungskoeffizient α ist gegeben durch

$$\alpha = \frac{1}{L_0} \frac{L(T) - L_0}{\Delta T} = \frac{1}{L_0} \frac{\Delta L}{\Delta T} \tag{5.1}$$

wobei $\frac{\Delta L}{\Delta T}$= Steigung der Geraden.

Der Fehler für beide Materialen lässt sich mithilfe der **Fehlerfortpflanzung nach Gauß** bestimmen:

$$\Delta f(x, y, z, \ldots) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right)^2 + \ldots}$$

Zeigen Sie, dass

$$\Delta\alpha = \sqrt{\left(-\frac{1}{L_0^2} \cdot \frac{\Delta L}{\Delta T} \cdot \Delta L_0\right)^2 + \left(\frac{1}{L_0} \cdot \Delta\left(\frac{\Delta L}{\Delta T}\right)\right)^2}$$

gilt:

Mit diesem Wissen können Sie nun Tabelle 5.3 ausfüllen.

	Material 1:		Material 2:	
Geradenanpassung	$\alpha \left[\frac{1}{°C}\right]$	$\Delta\alpha \left[\frac{1}{°C}\right]$	$\alpha \left[\frac{1}{°C}\right]$	$\Delta\alpha \left[\frac{1}{°C}\right]$
grafisch				
rechnerisch				
Literaturwerte				

Quelle(n): ____

Tabelle 5.3: *Berechnete Ausdehnungskoeffizienten inkl. Ungenauigkeiten, entsprechenden Literaturwerte und deren Quelle(n).*

6 Diskussion

Bewerten Sie Ihre Ergebnisse. Entsprechen die Verläufe aller Graphen Ihren Erwartungen? Falls nicht, was könnten mögliche Ursachen sein?

Welche Fehlerquellen gibt es in diesem Versuch?

Vergleichen Sie die Ergebnisse für die Ausdehnungskoeffizienten, die Sie aus einer Messreihe mit den zwei verschiedenen Methoden der Geradenanpassung gewonnen haben. Worin unterscheiden sich die beiden Methoden prinzipiell?

Vergleichen Sie unter Einbezug Ihrer berechneten Fehlerintervalle die Werte der linearen Ausdehnungskoeffizienten beider Materialien mit ihren jeweiligen Literaturwerten. Sind Ihre berechneten Fehlerintervalle in einer realistischen Größenordnung?

gesehen: ______________________ ____________________________________

(Datum) (Unterschrift Versuchsassistenz)

7 Literatur

- Fehlerrechnung und allgemeine Hinweise:
  http://www.astro.uni-koeln.de/AP/
- Meschede und Gerthsen: Physik, Springer, Berlin, 25. Aufl., 2015
  https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-662-45977-5.pdf
- Tipler: Physik, Heidelberg, Spektrum, Akad. Verlag, 1994
- Demtröder: Experimentalphysik Band 1, Springer Lehrbuch, 2018
  https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-662-54847-9.pdf
- Westphal: Physikalisches Praktikum, Vieweg+Teubner
- Walcher, Elbel und Fischer: Praktikum der Physik, Vieweg+Teubner
- Wegener: Physik für Hochschulanfänger

Feedback

Hier ist nach Ihrem Feedback zu dieser Anleitung gefragt. Gibt es etwas, das Sie an der Versuchsanleitung inhaltlich oder technisch ändern würden? Ist beispielsweise etwas nicht oder unzureichend erklärt, Lücken zu klein, etc.? Änderungsvorschläge könnten schon für die nächsten Praktikumsteilnehmer umgesetzt werden.

8 Anhang

8.1 Grafische Geradenanpassung

Bei einer grafischen Geradenanpassung werden die Parameter $a \pm \Delta a$ und $b \pm \Delta b$ einer Geradengleichung der Form $y = y(x) = a \cdot x + b$ bestimmt. Die Bestimmung der Werte erfolgt anhand der Auftragung mehrerer Wertepaare $(x_i | \, y_i)$ und deren Ungenauigkeiten Δx_i und/oder Δy_i in einem Diagramm, in welchem die Werte einem möglichst linearen Verlauf entsprechen. Falls nur jeweils die x_i- oder die y_i-Werte Ungenauigkeiten besitzen, sind die entsprechenden Fehlerbalken im Diagramm zu beachten. Sollten Ungenauigkeiten beider Größen vorliegen[1], sind die entsprechenden Fehlerflächen relevant.

Ein essentieller Schritt dieser Geradenanpassung ist die Findung von den zwei sogenannten Extremalgeraden, also einer Geraden mit möglichst kleiner und einer mit möglichst großer Steigung, welche beide gewissen Regeln unterliegen:

1. Die Gerade schneidet $^2/_3$ aller Messwerte in deren Fehlerbereichen.

2. Die restlichen Messwerte sind nicht weiter als der doppelte Fehlerabstand von der Geraden entfernt.

Es kommt vor, dass die zweite Regel nicht ganz erfüllt werden kann. Falls möglich sollte jedoch darauf geachtet werden. Dabei ist zu beachten, dass die Geraden unabhängig voneinander erstellt werden. Die Gerade maximaler Steigung kann durchaus andere Werte schneiden, als die Gerade minimaler Steigung. Häufig lassen sich nur so die wirklich größte und kleinste Steigung finden.
Wenn die Punkte im Diagramm eine deutliche Abweichung von den erforderlichen Regeln benötigen würden ist die Überlegung notwendig, ob eine rechnerische Geradenanpassung nicht sinnvoller wäre. Sollten nur einzelne Werte deutlich sichtbar aus dem linearen Verlauf fallen, so können diese ausgeklammert und mit zusätzlicher Begründung als Ausreißer unbeachtet bleiben.
Um die Extremalgeraden zu finden ist es sinnvoll beispielsweise ein langes Lineal an das Diagramm zu halten, um mehrere potentielle Geraden mit minimaler/maximaler Steigung auszuprobieren.

Im nächsten Schritt werden die Steigungswerte der Extremalgeraden $a_{\text{min/max}}$ und die y-Achsenabschnitte $b_{\text{min/max}}$ bestimmt. Damit die relativen Fehler klein ausfallen, sind dem Diagramm entsprechend möglichst große Steigungsdreiecke einzuzeichnen. An diesen werden dann unter Beachtung der Achsenskalierung die jeweiligen Δx und Δy abgelesen. Dabei ist

[1] In der realen Anwendung kann es auch vorkommen, dass Ungenauigkeiten so klein ausfallen, dass sie nicht sinnvoll im Diagramm dargestellt werden können. Dies gleicht effektiv dem Fall, dass nur von der jeweils anderen Größe Ungenauigkeiten vorliegen.

zu beachten, dass es sich hier nicht um Ungenauigkeiten, sondern Differenzen, handelt. Die Steigungen der Extremalgeraden ergeben sich aus $a = \pm\frac{\Delta y}{\Delta x}$, wobei das Vorzeichen dadurch bestimmt ist, ob die jeweilige Gerade steigend (+) oder fallend (−) ist. Sollte eine Achse entgegen der Norm invertiert beschriftet sein, ist dies natürlich bei der Vorzeichenwahl zu berücksichtigen.
Die Werte $b_{\text{min/max}}$ können entweder direkt im Diagramm abgelesen werden oder müssen mittels der Geradensteigung und einem Punkt auf der Geraden mit Hilfe der umgestellten Geradengleichung $b_{\text{min/max}} = y - a_{\text{min/max}} \cdot x$ bestimmt werden.

Zuletzt wird die Ausgleichsgerade bestimmt, indem die vorherigen Geradenparameter einfach gemittelt werden. Die Ungenauigkeiten der entsprechenden Mittelwerte bauen somit jeweils auf nur zwei Werten auf, wodurch sich die Formel der Standardabweichung des Mittelwerts stark vereinfacht:

$$\begin{aligned} a &= \frac{a_{\text{max}} + a_{\text{min}}}{2} \qquad \& \qquad \Delta a = \frac{a_{\text{max}} - a_{\text{min}}}{2}, \\ b &= \frac{b_{\text{max}} + b_{\text{min}}}{2} \qquad \& \qquad \Delta b = \left| \frac{b_{\text{max}} - b_{\text{min}}}{2} \right|. \end{aligned}$$

Anmerkung: Allgemein müssten auch bei Δa Betragsstriche stehen. Da a_{min} und a_{max} jedoch in einer festen Relation stehen, ergibt sich für Δa automatisch ein positiver Wert.

Würde diese Gerade im Diagramm eingezeichnet werden, sollte sie die beiden Extremalgeraden genau mittig schneiden.

Ein Beispiel:
In Abbildung 8.1 ist eine grafische Geradenanpassung mit neun Werten eines fiktiven Experiments und deren Ungenauigkeiten aufgetragen. Es ist die zu den Daten gehörige Geschwindigkeit $v \pm \Delta v$ in m/s gesucht.
Die Extremalgeraden werden jeweils durch das Schneiden von sechs Werten und deren Fehlerbalken/-flächen bestimmt, während die übrigen drei Werte möglichst noch im doppelten Fehlerabstand getroffen sind. Zur Berechnung der Steigungswerte werden die Steigungsdreiecke benutzt, also im Beispiel hier

$$a_{\text{min}} = \frac{210\,\text{cm}}{0{,}9\,\text{min}} \approx 233{,}33\,\frac{\text{cm}}{\text{min}} \qquad \& \qquad a_{\text{max}} = \frac{350\,\text{cm}}{0{,}7\,\text{min}} = 500\,\frac{\text{cm}}{\text{min}}.$$

Da beide Geraden von links nach rechts steigen, haben sie positive Steigungswerte. Die y-Achsenabschnitte der beiden Extremalgeraden lassen sich in diesem Fall nicht einfach aus dem Diagramm ablesen und müssen somit berechnet werden. Indem nun ein beliebiger Punkt einer Gerade zusammen mit der jeweiligen Steigung verwendet wird, lassen sich die gesuchten Werte finden. Für dieses Beispiel wird für a_{min} bei $x = 0{,}6\,\text{min}$ und für a_{max} bei $x = 1{,}3\,\text{min}$ geschaut, sodass sich die beiden Punkte $(\,0{,}6 \,|\, 280)$ und $(\,1{,}3 \,|\, 560)$ ergeben. Die y-Achsenabschnitte sind dann

$$\begin{aligned} b_{\text{min}} &= 280\,\text{cm} - 233{,}33\,\frac{\text{cm}}{\text{min}} \cdot 0{,}6\,\text{min} &\approx 140\,\text{cm}, \\ b_{\text{max}} &= 560\,\text{cm} - 500\,\frac{\text{cm}}{\text{min}} \cdot 1{,}3\,\text{min} &= -90\,\text{cm}. \end{aligned}$$

Nun gilt es noch die oben genannten Formeln für $a \pm \Delta a$ und $b \pm \Delta b$ anzuwenden und es ergibt sich

$$a \pm \Delta a = (366{,}665 \pm 133{,}335)\,\frac{\text{cm}}{\text{min}} \qquad \& \qquad b \pm \Delta b = (25 \pm 115)\,\text{cm}.$$

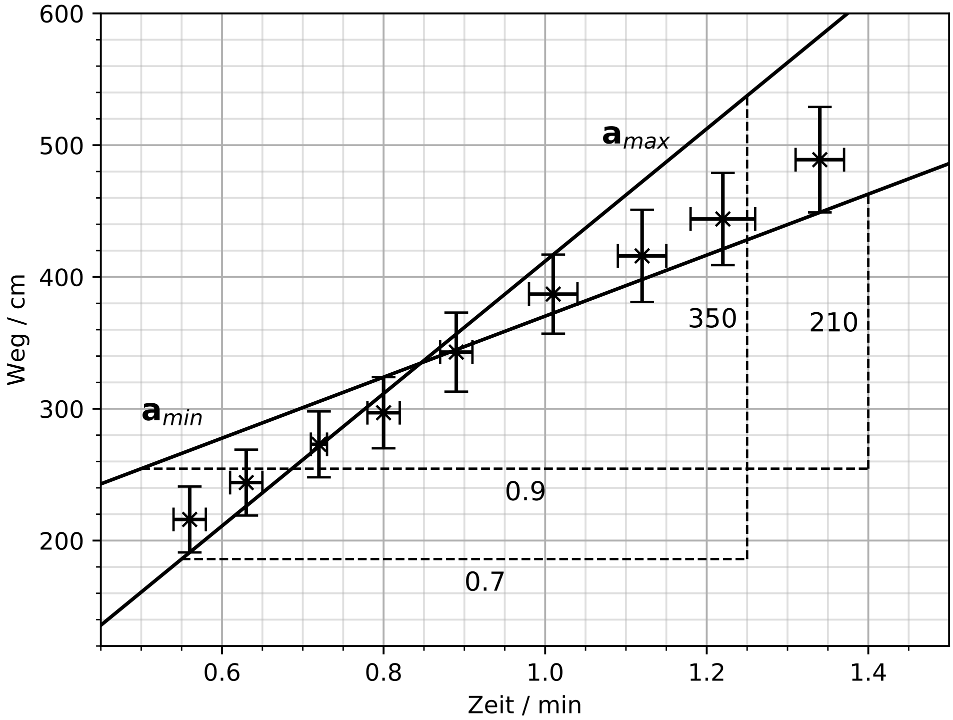

Abbildung 8.1: *Vollständige grafische Geradenanpassung. Extremalgeraden und Steigungsdreiecke sind eingezeichnet und beschriftet. Dazugehörige Rechnungen befinden sich im Text. angedeutet.*

Es ist wichtig zu beachten, dass die Steigungswerte nicht der gewünschten Angabe von Ergebnissen entspricht, da die Ergebnisse hier nicht signifikant gerundet sind! Diese genaueren Werte werden genutzt, um weitere Rechnungen durchzuführen, in diesem Fall also die Umrechnung in die gewünschten Einheiten.
Durch Umrechnung der Steigunsgwerte ergibt sich für die gesuchte Geschwindigkeit $v \approx (6{,}111 \pm 2{,}222) \cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, also gerundet $v = (6{,}1 \pm 2{,}2) \cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

8.2 Rechnerische Geradenanpassung

Die allgemeine Form einer Geradengleichung lautet

$$y = y\,(x) = a \cdot x + b.$$

Für einen Datensatz von Werten x_i und y_i $(i = 1, \ldots, N)$ lässt sich nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate eine entsprechende Geradengleichung finden. Anders ausgedrückt, es werden die Parameter a und b der Geraden so bestimmt, dass die Abweichungen zwischen den Werten und der Gerade minimal sind. Es ist sinnvoll für die Berechnung eigene Ausdrücke zu definieren:

$$\begin{aligned}
[x] &= \sum_{i=1}^{N} x_i & [y] &= \sum_{i=1}^{N} y_i \\
[xx] &= \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & [xy] &= \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i
\end{aligned}$$

$$\Delta = N \cdot [xx] - [x] \cdot [x]$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{N \cdot [xy] - [x] \cdot [y]}{\Delta} \quad \& \quad b = \frac{[xx] \cdot [y] - [x] \cdot [xy]}{\Delta}.$$

Weiterhin ist es möglich, und in der Regel notwendig, die Ungenauigkeiten von a und b zu bestimmen, also die Werte Δa und Δb. Erneut werden passende Ausdrücke definiert:

$$(\Delta y)^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N} \left(y(x_i) - y_i\right)^2 \qquad \text{für} \quad y(x_i) = a \cdot x_i + b$$

$$\Rightarrow \quad \Delta a = \sqrt{(\Delta y)^2 \, \frac{N}{\Delta}} \quad \& \quad \Delta b = \sqrt{(\Delta y)^2 \, \frac{[xx]}{\Delta}}.$$

8.3 Gaußsche Fehlerfortpflanzung

Die Gaußsche Fehlerfortpflanzung beschreibt den Einfluss fehlerbehafteter Größen x_i auf die Ungenauigkeit einer sich aus diesen zusammensetzenden Größe y. Als ein verallgemeinertes Beispiel ist der Wert von y mit dessen Ungenauigkeit Δy zu bestimmen. Der Wert y hängt von mehreren anderen Größen x_i ab, $y\,(x_1, x_2, x_3, \ldots)$.

Alle Größen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ besitzen jeweils eine Ungenauigkeit $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots$. Dann ergibt sich Δy aus

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_3}\Delta x_3\right)^2 + \ldots},$$

wobei die Brüche $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ partiellen Ableitungen von y nach einer Größe x_i entsprechen.

Ein Beispiel:
Um die Geschwindigkeit $v = \frac{l}{t}$ eines Fahrzeugs in einer Tempo 30-Zone zu bestimmen wird die Zeit t gestoppt, welche es für eine Strecke l benötigt. Beide Werte liegen vor: $l = (20{,}0 \pm 0{,}5)\,\mathrm{m}$ und $t = (2{,}2 \pm 0{,}2)\,\mathrm{s}$, also $v = \frac{20{,}0\,\mathrm{m}}{2{,}2\,\mathrm{s}} \approx 9{,}0909\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
Die Fehlerformel lautet hier

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial l}\Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{t}\Delta l\right)^2 + \left(-\frac{l}{t^2}\Delta t\right)^2} \qquad (8.1) \\
&= \sqrt{\left(\frac{l}{t}\cdot\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{l}{t}\cdot -\frac{\Delta t}{t}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{l}{t}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + (-1)^2 \cdot \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2\right)} \\
&= v \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}. \qquad (8.2)
\end{aligned}$$

Die Umformungen bis Gleichung (8.2) sind als generelle Vorlage zu verstehen, verglichen mit Gleichung (8.1) ist in diesem Beispiel keine starke Vereinfachung zu beobachten. In einigen Fällen ist dieses Schema jedoch sehr sinnvoll, insbesondere wenn dadurch lange Formeln letztendlich stark gekürzt werden. Allerdings ist zu beachten, dass es nicht auf alle Formeln anwendbar und somit jeder Fall einzeln abzuwägen ist.

Hier ergibt sich durch Einsetzen der Werte $\Delta v \approx 0{,}857\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 0{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Gerundet und mit umgerechneten Einheiten ist letztendlich $v \pm \Delta v = (9{,}1 \pm 0{,}9)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx (33 \pm 3)\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.