I. Physikalisches Institut
Universität zu Köln

W08: Barometrische Höhenformel

Praktikum A für Nebenfächler

Version vom 7. August 2023

Abzugeben bis: ____________________

Assistent: ____________________

Gruppenmitglieder: ____________________

Wichtige Informationen

Zur Bearbeitung ist es zwingend erforderlich, dass Sie sich mit den Grundlagen der Fehlerrechnung (u. a. Gaußsche Fehlerfortpflanzung, (gewichteter) Fehler des Mittelwerts, grafische Geradenanpassung) vertraut machen. Informationen dazu finden Sie beispielsweise im Dokument „allgemeine Hilfen für das Praktikum A“ auf der Webseite des A-Praktikums[a].

Aufgrund des Umfangs dieses Versuchs ist es nötig die Blätter mittels Schnellhefter o. ä. zu binden. Bitte lochen Sie die Blätter und heften Sie diese sorgfältig ein. Sollte die Form der Abgabe nicht den Regularien entsprechen, kann die*der Assistent*in die Annahme der Auswertung verweigern.

Versuchen Sie innerhalb der vorgegebenen Lücken zu bleiben. Diese geben ungefähr den an entsprechender Stelle erwarteten Umfang vor. Sollte der Platz dennoch nicht ausreichen, fügen Sie ganze Blätter ein, auf welchen deutlich markiert ist, was wozu gehört.

Beachten Sie bitte, dass alle entsprechenden Lücken und Fragestellungen ausgefüllt und beantwortet werden müssen. Insbesondere sind Lücken bis hin zum Messprotokoll bereits vor dem Versuchstag zu bearbeiten. Dies müssen Sie vor Ort nachweisen und wichtige Inhalte frei wiedergeben können. Es wird davon ausgegangen, dass alle Gruppenmitglieder die vollständige Anleitung durchgelesen und verstanden haben. Sollten Sie am Versuchstag nicht ausreichend auf den Versuch vorbereitet sein, wird die*der Assistent*in Sie nicht am Versuch teilnehmen lassen.

Die Abgabe muss alle Seiten umfassen, insbesondere aber Seiten mit auszufüllenden Lücken. Dazu gehören in jedem Fall die Titelseite, die Vorbereitung, das Messprotokoll und die Auswertung mit Diskussion.

Alle auf dem Deckblatt aufgeführten Gruppenmitglieder sind für die Bearbeitung und fristgerechte Abgabe des Versuchsberichts bzw. dessen erforderlichen Korrekturen zuständig und verantwortlich. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass Sie sich mit den Regeln des A-Praktikums[a] vertraut gemacht haben.

[a] zu finden unter: `https://www.astro.uni-koeln.de/AP/`

Es ist nicht notwendig den Anhang mit auszudrucken. Allerdings kann dieser gerade bei Detailfragen enorm weiterhelfen und soll durchgelesen und verstanden sein.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Im Rahmen dieses Versuches soll die vertikale Verteilung von idealen Teilchen in einem Schwerefeld anhand eines geeigneten Modells gemessen werden. Die Teilchenzahldichte N als Funktion der Höhe h wird im Zuge dessen durch die barometrische Höhenformel beschrieben. Diese Formel beschreibt unter bestimmten Voraussetzungen einen Zusammenhang zwischen Teilchenzahldichte und Höhe. Es kann gemessen werden, dass die Atmosphäre mit steigender Höhe an Teilchenzahldichte verliert bzw. „dünner“ wird. Druck und Teilchenzahldichte fallen exponentiell mit der Höhe ab. Andersherum ausgedrückt nimmt der Druck mit abnehmender Höhe zu, weil das Gas der Atmosphäre immer mehr die über ihm befindlichen Luftschichten zu tragen hat und diese zudem mit zunehmender Tiefe an Dichte gewinnen.

2 Vorbereitung (vor dem Praktikum, zu Hause)

Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit den theoretischen Grundlagen und Überlegungen zu diesem Versuch. Diese sollen auf den folgenden Bögen schriftlich erarbeitet werden. Bitte bearbeiten sie alle Aufgabenstellungen und Lücken zur Vorbereitung des Antestats. Die Vollständigkeit der Ausarbeitung überprüft die Versuchsassistenz vor Beginn des Versuches: Nur Studenten mit Protokollen, die komplett ausgefüllte und bearbeitete Antestate vorweisen, können an dem Versuch teilnehmen! Außerdem sollten Sie in der Lage sein, diese Inhalte am Versuchstag im mündlichen Antestat selbstständig wiederzugeben.

Literaturvorschläge gibt es in Abschnitt 8. Zur selbstständigen Recherche können zum einen diese oder andere Literatur verwendet werden.

2.1 Allgemeine Begriffe und Gesetzmäßigkeiten

Machen Sie sich mit folgenden Begriffen und Gesetzmäßigkeiten vertraut:

2.1.1 Absolute Temperatur und Kelvin-Skala

Ein Temperaturwert, der sich am absoluten Nullpunkt eines thermodynamischen Systems orientiert, heißt

$$\rule{6cm}{0.4pt}\;.$$

Experimente haben ergeben, dass das Produkt $p \cdot V$ bei konstanter Molekülzahl N direkt proportional zur Temperatur T ist. Dies bedeutet, dass die mittlere kinetische Energie

$$\overline{E_{\text{kin}}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \overline{v}^2$$

der Teilchen eines thermodynamischen Systems von der Temperatur abhängt. Dabei beträgt für ein Teilchen ($N = 1$) die mittlere thermische Energie pro Freiheitsgrad f (vgl. 2.1.7):

$$\frac{\overline{E_{\text{kin}}}}{f} = \rule{4cm}{0.4pt}$$

Man definiert die absolute Temperatur T_{K} für ein System freier Gasatome der Masse m mit drei Freiheitsgraden der Bewegung ($f = 3$) folglich durch die mittlere kinetische Energie:

$$\overline{E_{\text{kin}}} = \frac{f}{2} \cdot k_{\text{B}} \cdot T_{\text{K}} = \rule{4cm}{0.4pt}$$

wobei $k_B = 1{,}380649 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K}$ __________________________________ heißt, so dass für die Angabe der absoluten Temperatur der folgende Zusammenhang verwendet werden kann:

$$T_K = \frac{1}{k_B} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{m}{2} \cdot \overline{v^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k_B} \cdot \overline{E_{kin}}$$

Auf Grundlage dieser Erkenntnisse wurde eine Temperaturskala eingeführt, bei der T_K proportional zu $\overline{E_{kin}}$ ist. Diese Skala beginnt beim

__________________________________ ,

der erreicht ist, wenn die mittlere kinetische Energie der Teilchen eines Systems gleich Null ist. Die Temperaturen dieser Skala werden in Einheiten Kelvin K angegeben. Um einen einfacheren Vergleich zwischen Celsius- und Kelvin-Skala zu ermöglichen, legte man für beide gleiche Skalen-Aufteilungen fest, d. h. eine Temperaturänderung von:

$$\Delta T_K = 1\,\mathrm{K}$$

entspricht auf der Celsius-Skala einer Änderung von:

$$\Delta T_C = \underline{\qquad}\ ^\circ\mathrm{C}$$

Es gilt folgender Umrechnungszusammenhang:

$$\boxed{\begin{aligned} T_K &= T_C + 273{,}15 \\ T_C &= T_K - 273{,}15 \end{aligned}}$$

Beispiele: Füllen Sie die folgende Tabelle 2.1 vollständig aus.

T_K in K	T_C in °C
0	
50	
100,50	
298,75	
	273
	50
	−75
	0

Tabelle 2.1: *Übungstabelle Skalenumrechnung*

2.1.2 Eigenschaften idealer Gase

Das ideale Gas ist ein Modell eines Gases, das eine Reihe von Bedingungen erfüllt. Es wird durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert:

1. Ein ideales Gas besteht aus ________________ oder ________________ die sich mit statistisch verteilten Geschwindigkeiten bewegen und die sich wie kleine starre Kugeln verhalten.

   Das heißt, die Gasteilchen sollen bezüglich ihrer Form invariant sein, also nicht verformbar.

2. Die Zusammenstöße der Teilchen untereinander und mit der Wand sind vollkommen

   ________________, d. h. ohne Verlust von ________________ (z. B. durch Reibung).

3. Der umgebene Raum wird im Verhältnis zur Teilchengröße als unendlich groß angenommen. Das heißt, dass sich das Gas unbegrenzt weit ausdehnen kann.

4. Der Durchmesser der Teilchen soll unendlich __________ sein. Das bedeutet, das Gas besteht aus Teilchen mit infinitesimal kleinem Durchmesser im Gegensatz zu ihrem Abstand zueinander und im Verhältnis zur Raumgröße selbst.

5. Die Teilchen haben keine ____________________ untereinander, d. h. sie sind bspw. elektrisch neutral und es besteht keine Anziehung oder Abstoßung untereinander. Folglich findet beispielsweise weder durch Gravitation noch durch Dipoleffekte eine Wechselwirkung statt.

2.1.3 Ideales Gasgesetz

Die Teilchen eines idealen Gases nehmen, unabhängig von der Art des Gases, bei übereinstimmenden äußeren Bedingungen immer die gleiche Menge Raum ein.

Damit das thermodynamische Verhalten solcher Gase beschrieben werden kann, wird zur Charakterisierung derer Zustände und Zustandsänderungen, der Begriff der Zustandsgröße verwendet. Mögliche Zustandsgrößen sind:

Druck p, ____________________ , ____________________ , ____________________ ,

____________________ , . . .

Für ideale Gase kann eine Beziehung zwischen den Zustandsgrößen (p, V, T) und der Stoffmenge n durch den folgenden Zusammenhang beschrieben werden

____

wobei die universelle Gaskonstante $R = N_\mathrm{A} \cdot k_\mathrm{B} \approx 8{,}3144626\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K \cdot mol}}$ als Produkt aus

______________________________ N_A und ______________________________ k_B geschrieben werden kann. Die Stoffmenge n charakterisiert, wie viele Molvolumina V_M des Gases in dessen Volumen V enthalten sind, d. h.

$$n = \frac{V}{V_\mathrm{M}}$$

Durch diese Zusammenhänge kann die ideale Gasgleichung zur allgemeinen Form umformuliert werden:

$$p \cdot V_\mathrm{M} = N_\mathrm{A} \cdot k_\mathrm{B} \cdot T = R \cdot T$$

2.1.4 Die Boltzmann-Konstante

Die Boltzman-Konstante k_B (benannt nach Ludwig Boltzmann) ist eine Naturkonstante,

die auch molekulare Gaskonstante genannt wird. Sie ist ein ______________________________-Faktor der idealen Gasgleichung $p \cdot V = N \cdot k_\mathrm{B} \cdot T$. Sie kann als Umrechnungsfaktor zwischen der absoluten Temperatur in Kelvin K und Energie in Joule J verstanden werden. Sie lautet genähert:

$$k_\mathrm{B} \approx 1{,}380649 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

Das Produkt $k_\mathrm{B} \cdot T$, welches in einigen Gesetzen der Wärmelehre zu finden ist, ist folglich eine

______________________________ .

2.1.5 Der Boltzmann-Faktor

Der Boltzmann-Faktor lautet

$$e^{-\left(\frac{E}{k_\mathrm{B} \cdot T}\right)}$$

und enthält neben der Eulerschen Zahl e die physikalischen Größen ______________________,

__________________________ und __________________________, wobei das Produkt $k_\mathrm{B} \cdot T$ die thermische Energie ist. Der obige Faktor wird aus statistischen Betrachtungen hergeleitet und folgt der sogenannten

____________________________ - Statistik.

Falls ein thermodynamisches System verschiedene Energiezustände E_i relativ zu einem

________________________ E_0

aufweist (E_0 = Zustand der kleinsten Energie), dann ist im thermodynamischen Gleichgewicht die Zahl der Teilchen N_i, die diese Energiezustände besetzen oder nicht besetzen, gegeben durch:

$$\frac{N_i}{N_0} = e^{-\left(\frac{E_i}{k_\mathrm{B} \cdot T}\right)}$$

Allgemein gilt folglich, dass die Wahrscheinlichkeit $W(E)$, einen Zustand der Energie E mit einem Teilchen besetzt vorzufinden, proportional zum Boltzmann-Faktor ist:

$$W(E) \propto e^{-\left(\frac{E}{k_\mathrm{B} \cdot T}\right)}$$

Dabei wird die Verteilung jeweils für eine gegebene Temperatur T betrachtet.

2.1.6 Vergleich zwischen Boltzmann-Konstante und -Faktor

Zuvor haben Sie eine Definition der Boltzmann-Konstante und des Boltzmann-Faktors erarbeitet. Arbeiten Sie im folgenden Abschnitt die Unterschiede zwischen diesen beiden Größen heraus:

____

____

____

2.1.7 Der Boltzmannsche Gleichverteilungssatz – Äquipartitionstheorem

Innerhalb eines idealen Gases, das ausreichend lange eine konstante Temperatur aufweist, verteilt sich die Energie der einzelnen Teilchen durch Stöße gleichmäßig auf alle seine

________________________ .

Jedes Atom oder Molekül hat im dreidimensionalen Raum ________ mögliche Bewegungsrichtungen (x, y, z), welche auch Freiheitsgrade f der

____

genannt werden. Durch Stöße mit anderen Teilchen ändern sich die Richtungen und Beträge der Geschwindigkeiten derart, dass im zeitlichen Mittel alle Freiheitsgrade gleich wahrscheinlich werden. Das heißt, die mittlere kinetische Energie jedes Teilchens über all ihre verfügbaren Freiheitsgrade beträgt:

$$\overline{E_{\mathrm{kin}}} = f \cdot \frac{1}{2} \cdot k_{\mathrm{B}} \cdot T$$

Im Gegensatz zu den Gasteilchen im Modell eines idealen Gases kommen bei realen Teilchen oft neben der Translation noch Freiheitsgrade der ______________________________ und ______________________________ hinzu. Allgemein ist für ein System mit N Teilchen und f Freiheitsgraden die innere Energie somit

$$\overline{U} = \underline{\hspace{6cm}} \; .$$

2.2 Barometrische Höhenformel

2.2.1 Definition der barometrischen Höhenformel

Die barometrische Höhenformel beschreibt, wie sich der _________________________ als Funktion der Höhe h mit Bezug auf die Erdoberfläche ändert. Die Fallbeschleunigung g wird als konstant angenommen. Der barometrischen Höhenformel liegt die Theorie zugrunde, dass die Gewichtskraft eines Gasvolumens durch die Druckdifferenz an der Ober- und Unterseite des Volumens kompensiert wird. Der Druck in der Erdatmosphäre nimmt _________________________ mit der Höhe ab. Hierbei wird angenommen, dass sich die _________________________ nicht ändert, also konstant bleibt. Die Atmosphäre ist dann iso_________________.

Formel:

$$p\,(h) = \underline{\hspace{6cm}} \tag{2.1}$$

Physikalische Einheiten

physikalisches Symbol	Einheit	Bezeichnung der Größen
p	Pa	
p_0	Pa	
h	m	
m	kg	
g	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	
k_B	$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$	
T	K	

Diagramm

Skizzieren Sie den zur barometrischen Höhenformel zugehörigen Graphen $p(h)$ im nachfolgenden Diagramm (Abbildung 2.1). Berechnen Sie dafür ein paar Diagrammpunkte mit Hilfe der barometrischen Höhenformel und tragen Sie diese gut erkennbar in das Diagramm ein. Zur Berechnung verwenden Sie die Daten aus Tabelle 2.2 für den mittleren Zustand, der durch die internationale Standardatmosphäre beschrieben wird.Verbinden Sie die Punkte dann sinnvoll, also entsprechend dem erwarteten exponentiellen Abfall.

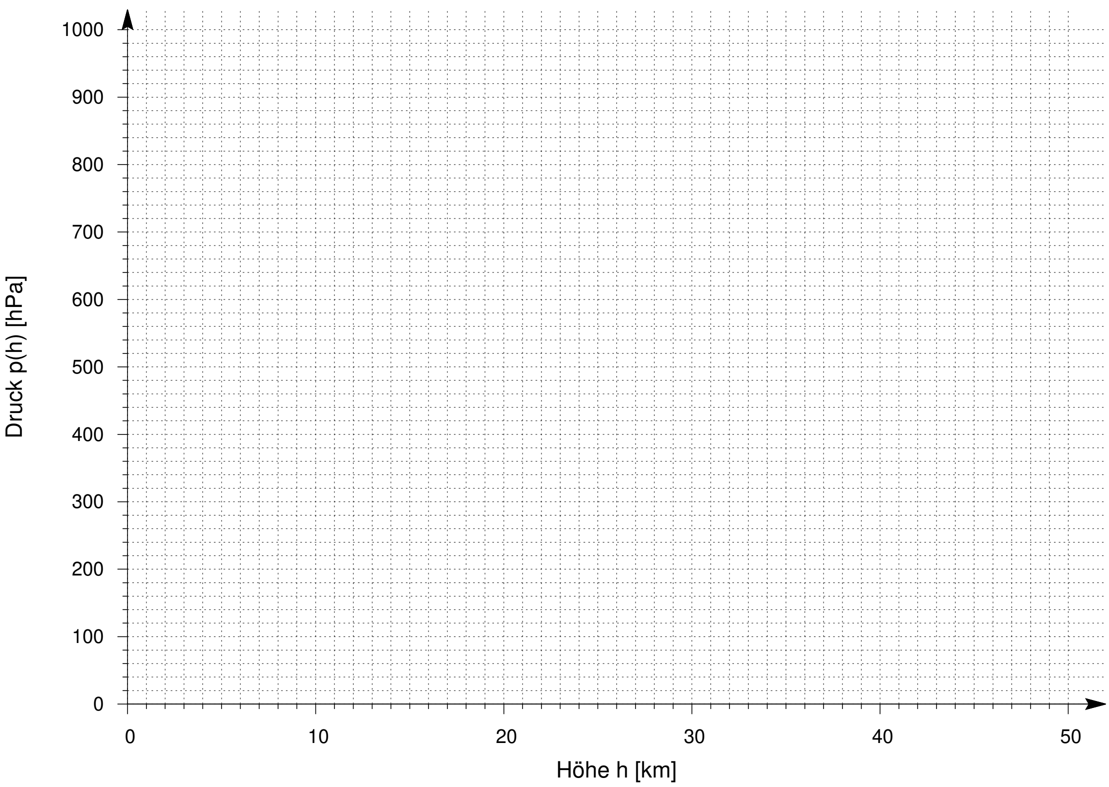

Abbildung 2.1: *Diagramm zur Funktion* $p\left(h\right) = p_0 \cdot e^{-\frac{m \cdot g \cdot h}{k_{\boldsymbol{B}} \cdot T}}$

Physikalische Größe	Wert mit Einheit
Jahresmittel absolute Lufttemperatur auf Meereshöhe T	$288{,}15\,\mathrm{K}$
Jahresmittel Luftdruck auf Meereshöhe p_0	$1013{,}25\,\mathrm{hPa}$
Masse eines Luftteilchens m	$4{,}8 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$

Tabelle 2.2: *Daten zur Berechnung einzelner Werte für das Diagramm der barometrischen Höhenformel. Die angegebene Teilchenmasse ergibt sich aus der mittleren molaren Masse der Atmosphärengase $M \approx 0{,}02896\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}$. Die Vorgaben gelten nur in ungefähr und nur in der Troposphäre.*

2.2.2 Herleitung der barometrischen Höhenformel

Zur Herleitung der barometrischen Höhenformel gehen wir von folgenden Annahmen zur Atmosphäre aus:

1. Die Temperatur des Gases ist konstant:
$$T = \text{const.}$$

2. Es tritt nur eine Teilchenart auf. Alle Teilchen haben die gleiche Masse und diese ist konstant:
$$m = \text{const.}$$

3. Für die Teilchen gilt die Zustandsgleichung eines idealen Gases:
$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Im Schwerefeld der Erde erfährt jedes einzelne Teilchen der Masse m die Beschleunigung g und es wirkt folglich die Schwerkraft $F_{\mathrm{G}} = m \cdot g$. Angenommen in der Atmosphäre existieren N solcher Teilchen. Dann nehmen diese ein räumliches Volumen V ein und die gesamte Schwerkraft auf alle N Teilchen summiert sich zu:

$$G = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot g = m \cdot g \cdot N$$

Wir wissen, dass die Teilchenzahldichte n[1] für ein Volumen V definiert ist durch:

$$n = \frac{N}{V}$$

Nach N umgeformt und in die Formel von G eingesetzt ergibt sich:

---

[1] Das Formelzeichen n steht hier für die Anzahl der in einem bestimmten Volumen V enthaltenen Teilchen N und ist somit eine Dichte. Dies kann schnell mit der Stoffmenge n verwechselt werden, da sie meist das gleiche Formelzeichen besitzen. Die Stoffmenge ist im Vergleich zur Teilchenzahldichte eine rein die molare Menge eines Stoffes betreffende Größe.

Betrachte ein infinitesimales Volumen dV in der Atmosphäre. Dieses besitzt eine Fläche A parallel zum Erdboden und eine vertikale Ausdehnung, die Höhe dh. Wir wissen auf Grundlage der obigen Definition, dass mit Variation der Höhe dh auch der Druck p bzw. die Teilchendichte n variiert. Da der Druck mit zunehmender Höhe abnimmt, folgt, dass die Änderung des Druckes dp bei Zunahme der Höhe um das Stück dh ein negatives Vorzeichen hat. Wir wissen, Druck ist definiert als:

$$p := \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$$

Mit $A = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}$ und G wie oben, sowie unter Berücksichtigung der Richtung, ergibt sich schließlich für die Druckänderung:

$$\mathrm{d}p = -m \cdot g \cdot n \cdot \mathrm{d}h \tag{2.2}$$

Die Teilchenzahldichte n ist vom Druck abhängig und vorausgesetzt wurden Teilchen und Bedingungen unter denen die Zustandsgleichung eines idealen Gases gilt. Mit $V = \frac{N}{n}$ folgt:

$$p = n \cdot k_\mathrm{B} \cdot T \qquad \Leftrightarrow \qquad n = \frac{p}{k_\mathrm{B} \cdot T} \tag{2.3}$$

Wird die Teilchenzahldichte n aus Gleichung (2.2) mit Hilfe von (2.3) ersetzt, ergibt sich die folgende Differentialgleichung (DGL):

$$\underline{\hspace{8cm}} \tag{2.4}$$

Dies ist eine DGL vom Typ trennbar und kann daher durch Trennung der Variablen gelöst werden:

$$\frac{1}{p} \cdot \mathrm{d}p = -\left(\frac{m \cdot g}{k_\mathrm{B} \cdot T}\right) \cdot \mathrm{d}h \tag{2.5}$$

Es können zur Lösung der DGL folgende Integrale aufgestellt werden:

$$\int_{p_0}^{p} \frac{1}{P}\ \mathrm{d}P = -\left(\frac{m \cdot g}{k_\mathrm{B} \cdot T}\right) \cdot \int_{h_0}^{h}\ \mathrm{d}H \tag{2.6}$$

Auf der Erdoberfläche $h_0 = 0$ liegt ein fester Druck $p(h_0) = p_0$ vor. Mit Hilfe dieser Anfangswertbedingung, lassen sich die Integralgrenzen wie folgt anpassen:

$$\int_{p_0}^{p} \frac{1}{P}\ \mathrm{d}P = -\left(\frac{m \cdot g}{k_\mathrm{B} \cdot T}\right) \cdot \int_{0}^{h}\ \mathrm{d}H \tag{2.7}$$

Integration ergibt:

$$\Big[\ln(P)\Big]_{p_0}^{p} = -\left(\frac{m \cdot g}{k_\mathrm{B} \cdot T}\right) \cdot \Big[H\Big]_{0}^{h} \tag{2.8}$$

Aus vorausgehender Definition zur barometrischen Höhenformel haben wir bereits einen exponentiellen Zusammenhang erwartet. Nach der Integration ist jetzt klar, dass dieser Zusammenhang unter den festgelegten Voraussetzungen gilt. Umformung führt folglich in wenigen Schritten zur barometrischen Höhenformel:

$$\ln(p) - \ln(p_0) = \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\left(\frac{m \cdot g}{k_\mathrm{B} \cdot T}\right) \cdot h \tag{2.9}$$

Es ergibt sich der folgende exponentielle Zusammenhang:

$$\underline{\hspace{6cm}} \tag{2.10}$$

Für die Teilchenzahldichte n als Funktion der Höhe h ergibt sich durch die Zustandsgleichung (2.3) und mit konstanter Temperatur T (vgl. Voraussetzung 1.):

$$\frac{p}{p_0} = \frac{n}{n_0} \tag{2.11}$$

Druck und Teilchenzahldichte fallen in der Atmosphäre exponentiell mit der Höhe ab. Das heißt Gleichung (2.10) kann auch anstelle des Drucks p über die Teilchenzahldichte n ausgedrückt werden, sodass sie dann die folgende Form annimmt:

$$\underline{\hspace{6cm}} \tag{2.12}$$

Anmerkung:
Bei Anwendung der barometrischen Höhenformel sind jedoch die Annahmen zu berücksichtigen, die wir bei der Herleitung gemacht haben. Die größte Abweichung zur Realität wird die Annahme einer konstanten Temperatur sein. Daher weicht die Druckverteilung der realen Atmosphäre durch ihre Zusammensetzung, ihre Bewegung und ihre oftmals sehr ungleichmäßige Temperaturverteilung stark von dem durch die barometrische Höhenformel beschriebenen Zusammenhang ab. Sie ist daher meist nur für Schichten von wenigen hundert Metern gut anwendbar. Für Teilchen verschiedener Masse m ergeben sich aus der barometrischen Höhenformel auch verschiedene Verteilungen. Der Anteil schwerer Teilchen müsste bei abnehmender Höhe größer werden und umgekehrt. Dieser Effekt ist aufgrund der guten Durchmischung der Atmosphäre kaum zu beobachten. Er zeigt sich allerdings sehr deutlich bei der Verteilung von Staubteilchen, die wegen ihrer großen Masse nur geringe Höhen erreichen.

2.3 Vorbereitungsfragen zum Versuch

1. **Frage:**
   Was genau soll während der Versuchsdurchführung gemessen werden?

   Antwort:

   ____

   ____

2. **Frage:**
   Wie sollen die oben genannten Größen während des Versuchs gemessen werden?

   Antwort:

3. **Frage:**
   Was sind die Ziele dieser Versuchsdurchführung, der damit einhergehenden Messungen und der anschließenden Auswertung?

   Antwort:

Nebenrechnungen / Ergänzungen / Notizen:

3 Versuchsaufbau und -beschreibung

Da die Teilchenzahl und die daraus resultierende Dichteverteilung der Atmosphäre nicht gemessen werden können, wird zum Nachweis der barometrischen Höhenformel ein zweidimensionales Modellgas verwendet. Die Teilchen des Modellgases werden mit Hilfe einer Anzahl von flachen Pucks dargestellt. Diese bewegen sich auf einem Lufttisch nahezu reibungslos und erfüllen dabei einige Kriterien eines idealen Gases. Zur Herstellung eines Schwerefeldes wird in diesem Versuch der Lufttisch aus der Horizontalen geneigt. Eine Aufgabe wird es sein, die statistische Verteilung der Pucks in Abhängigkeit zur Tischneigung zu bestimmen. Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

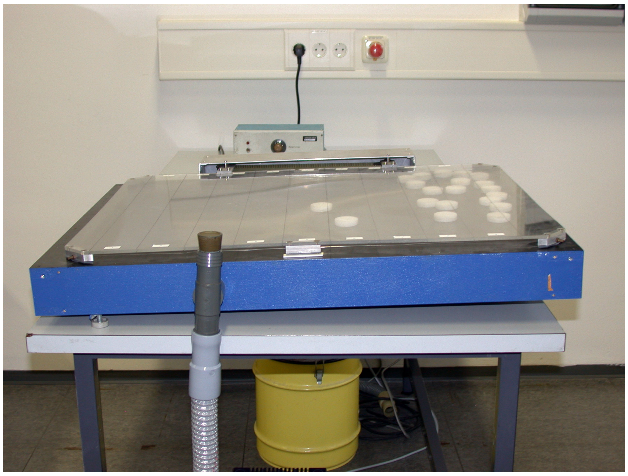

Abbildung 3.1: *Foto des Versuchsaufbaus*

Eine Anzahl Pucks gleicher Größe und gleichen Gewichtes befindet sich auf einem Lufttisch, auf dessen Oberfläche nahezu gleich große Zonen markiert sind. Wird das Gebläse eingeschaltet, schweben die Pucks und können sich nahezu reibungsfrei über die Tischoberfläche bewegen. Ein an den Lufttisch angebrachter Rüttelrahmen simuliert die ungeordnete Bewegung von Gasteilchen zu einer bestimmten Temperatur. Durch den Rüttelrahmen werden die Pucks angestoßen und gleiten über den Tisch. Diese stoßen sich wiederum untereinander und verteilen sich auf diese Weise auf dem Tisch. Durch Neigung des Tisches wird ein Schwerefeld erzeugt. Die effektive Schwerebeschleunigung, die auf die Pucks wirkt, ist durch die Komponente der Erdbeschleunigung parallel zur Lufttischoberfläche gegeben. Daraus resultiert, dass eine Wahl von verschiedenen Tischneigungswinkeln α zu unterschiedlichen effektiven Schwerebeschleunigungen führt. In der Atmosphäre ist die Schwerebeschleunigung näherungsweise konstant. Die Gasteilchen besitzen jedoch in verschiedenen Höhen unterschiedliche potentielle Energien

$$E_{\mathrm{pot}} = m \cdot g \cdot h$$

Die Änderung der Tischneigung entspricht aufgrund des sich ändernden Produktes $g \cdot \mathrm{d}h$ letztendlich einer Änderung der potentiellen Energie

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{pot}} = m \cdot g \cdot \mathrm{d}h$$

und simuliert damit unterschiedliche Höhen in der Atmosphäre. Der Neigungswinkel α des Tisches wird geometrisch durch die Längen h_1, h_2 und b bestimmt. Zur Veranschaulichung vergleiche mit Abbildung 3.2.

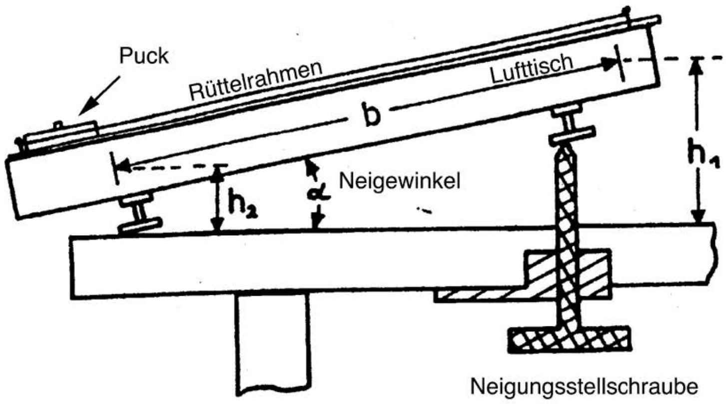

Abbildung 3.2: *Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus. (Seitenansicht)*

Die übrigen Daten der beiden Versuchsaufbauten, zuzüglich der Messunsicherheiten, können der Tabelle 3.1 entnommen werden.

	Aufbau 1 (rote Pucks)	Aufbau 2 (weiße Pucks)
Puckmasse	$(16{,}78 \pm 0{,}02)\,\mathrm{g}$	$(13{,}37 \pm 0{,}02)\,\mathrm{g}$
Puckdurchmesser	$(3{,}82 \pm 0{,}02)\,\mathrm{cm}$	$(4{,}38 \pm 0{,}02)\,\mathrm{cm}$
Zonenbreite	$(7{,}0 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$	$(7{,}0 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$

Tabelle 3.1: *Details zu den Versuchsaufbauten.*

Vorbereitungsaufgabe - Überlegungen zum Tischneigungswinkel α:

Auf Abbildung 3.2 ist der Tischneigungswinkel α eingezeichnet. Mit Hilfe der Tischneigung wird die Schwerebeschleunigung des Modellgases simuliert. Überlegen Sie sich im Vorfeld, welche Neigungswinkel für das Experiment sinnvoll sein könnten, welche nicht und begründen Sie dies. Machen Sie sich im folgenden ein paar kurze Notizen dazu:

4 Benötigte Formeln

Tischneigung
Die Tischneigung wird über den Neigungswinkel α bestimmt. Dieser kann über den Sinus aus den gemessenen Größen aus Abbildung 3.2 bestimmt werden. Die dort eingezeichneten Größen sind die Höhen h_1, h_2 sowie die Messbereichsbreite b. Somit wird der Sinus des Neigungswinkels wie folgt berechnet:

$$\sin(\alpha) = \frac{h_1 - h_2}{b} \tag{4.1}$$

Effektive Schwerebeschleunigung
Die effektive Schwerebeschleunigung g_{eff} ist durch die Hangabtriebsbeschleunigung der Pucks auf dem geneigten Tisch gegeben:

$$g_{\text{eff}} = g \cdot \left(\frac{h_1 - h_2}{b} \right) = g \cdot \sin(\alpha) \tag{4.2}$$

Barometrische Höhenformel für Teilchenzahlen
Die barometrische Höhenformel aus Abschnitt 2.2.2 (Gleichung (2.12)) gilt bei festgelegtem und konstantem Volumen V auch direkt für die Teilchenzahl N. (Da hier sowohl T, als auch V als konstant vorausgesetzt wurden.)

$$N(h) = N_0 \cdot e^{-\frac{m \cdot g \cdot h}{k_{\text{B}} \cdot T}} \tag{4.3}$$

Dabei ist N_0 die Teilchenzahl bei $h = 0$, m die Teilchenmasse, T die absolute Temperatur des Gases und k_{B} die Boltzmann-Konstante. Ausführungen zur Herleitung der barometrischen Höhenformel finden sich in Abschnitt 2.2.2 dieser Versuchsanleitung.

Werden beide Seiten logarithmiert und angenommen, dass g die effektive Erdbeschleunigung g_{eff} ist, so ergibt sich aus Gleichung (4.3):

$$\ln(N(h)) = \ln(N_0) - \frac{m \cdot g_{\text{eff}} \cdot h}{k_{\text{B}} \cdot T}$$

Durch Einsetzen der effektiven Schwerebeschleunigung für die Pucks (Gleichung (4.2)) ergibt sich folgender linearer Zusammenhang:

$$\ln(N(h)) = \ln(N_0) - \left(\frac{m \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{k_{\text{B}} \cdot T} \right) \cdot h \tag{4.4}$$

5 Durchführung (im Praktikum)

Lesen Sie vor Beginn der Versuchsdurchführung die folgenden Anweisungen, Beschreibungen und Hinweise zur Versuchsdurchführung und Protokollführung sorgfältig durch. Beantworten Sie die Lücken zu den Versuchsfragen.

Sicherheitshinweis:
Informieren Sie bei Defekten an Bestandteilen des Aufbaus Ihre Versuchsassistenz. Versuchen Sie nicht selbst Teile zu demontieren!

Abbildung 5.1: *Foto der Vorderseite des Steuergerätes*

Abbildung 5.1 zeigt die Frontseite des Steuerungsgerätes. Das Gebläse und das Steuergerät werden gleichzeitig über den roten Schaltknopf (Aufschrift: Power) gestartet. Der Rüttelrahmen wird über den rechteckigen grauen Schaltknopf rechts unten am Display aktiviert (Aufschrift: Output). Die Rüttelfrequenz des Tisches (Drehknöpfe: Voltage - Variiert die Spannung) darf zu keinem Zeitpunkt des Versuches verstellt werden. Die Rüttelstärke des Tisches (Drehknopf: Current - Variiert die Stromstärke) kann vor Versuchsbeginn verstellt werden, muss jedoch für beide Messreihen beibehalten werden.

Die Tischneigung wird mittels einer Schraube am Lufttisch verstellt. Der Neigungswinkel soll für jede Messreihe individuell gewählt werden, darf jedoch während einer Messreihe nicht mehr variiert werden. Die Beinschrauben des Lufttisches dürfen jedoch nicht verstellt werden. Die Luftzufuhr zum Tisch wird über einen Stopfen am Schlauch reguliert.

1. **Eingewöhnung**
   Machen Sie sich zuerst mit dem Aufbau des Versuches vertraut. Spielen Sie mit der Anordnung unter Berücksichtigung der obigen Hinweise herum, wobei Sie sich mit der Beobachtungstechnik für die folgenden Messungen vertraut machen und mögliche Fehlerquellen erkennen sollten. Finden Sie durch Ausprobieren zumindest schonmal für die erste Messreihe einen sinnvollen Neigungswinkel.

2. **Messdurchführung**
   Notieren Sie die Farbe der Pucks an Ihrem Aufbau: ____________________________

   Führen Sie die folgenden Messungen für zwei verschiedene Tischneigungen durch:

   a) Wählen Sie eine Tischneigung. Messen Sie die Höhen h_1 und h_2 und die Länge b und tragen Sie diese in Tabelle 5.1 ein. Schätzen Sie für jede der drei Größen eine Messungenauigkeit und notieren Sie diese ebenfalls in Tabelle 5.1.

Durchführung [Nr.]	h_1 [cm]	h_2 [cm]	b [cm]
1			
2			
Messungenauigkeiten	Δh_1 [cm]	Δh_2 [cm]	Δb [cm]

Tabelle 5.1: *Messdaten zur Tischneigung*

   b) Schalten Sie den Rüttelrahmen ein. Sobald sich ein Gleichgewicht bei den Pucks eingestellt hat (nach ca. 20 Sekunden), ziehen Sie den Stopfen an der Luftzufuhr des Tisches, um diese zu unterbrechen und schalten Sie danach den Rüttelbetrieb aus. Aufgrund des schnellen Auftriebsverlustes wird der Verteilungszustand der Pucks instantan eingefroren.

   c) Zählen Sie die Anzahl der Pucks für jede einzelne Zone und tragen Sie diesen Wert sorgfältig in Wertetabelle 5.2 zur ersten Messreihe (analog Wertetabelle 5.3 zur zweiten Messreihe) ein.

   d) Starten Sie eine neue Messung, indem Sie den Rüttelrahmen erneut einschalten und die Luftzufuhr des Tisches durch Einsetzen des Stopfens wiederherstellen.

   e) Führen Sie auf diese Weise insgesamt 30 Messungen der Puckverteilung für je eine Tischneigung durch.

   f) Führen Sie nun eine zweite Messreihe mit einer anderen Tischneigung durch und beginnen Sie mit Schritt a).

   Abschluss des Versuchs

   Schalten Sie nach dem Versuch das Gebläse und den Rüttelbetrieb wieder aus. Kontrollieren Sie, ob Ihr Messprotokoll vollständig ist, also ob alle Lücken mit einem nicht löschbaren Stift ausgefüllt sind.

AT: ____________________ ______________________________________
(Datum) (Unterschrift Versuchsassistenz)

1. Messreihe zur Puckverteilung

	Zonennummer								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									
20									
21									
22									
23									
24									
25									
26									
27									
28									
29									
30									

Tabelle 5.2: *1. Messreihe zur Puckverteilung - Anzahl der Pucks N pro Zone für Messung 1 bis 30.*

2. Messreihe zur Puckverteilung

	Zonennummer								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									
20									
21									
22									
23									
24									
25									
26									
27									
28									
29									
30									

Tabelle 5.3: *2. Messreihe zur Puckverteilung - Anzahl der Pucks N pro Zone für Messung 1 bis 30.*

6 Auswertung (zu Hause)

Führen Sie zu jedem errechneten und mit Messunsicherheiten behafteten Wert eine Fehlerrechnung durch. Geben Sie alle verwendeten Formeln an und erläutern Sie kurz, was Sie tun und warum. Zeichnen Sie Ihre Diagramme sorgfältig auf dem dafür vorgesehenen Millimeterpapier und beschriften Sie sie vollständig (Überschrift, Achsenbeschriftung, u. a.). Die korrekte Form zur Angabe von Ergebnissen, sowie Hinweise zur Fehlerrechnung entnehmen Sie bitte den diesbezüglichen Dokumenten zur Fehlerrechnung auf der www-Seite des Praktikum A unter `https://www.astro.uni-koeln.de/AP/`.

6.1 Nachweis der barometrischen Höhenformel

1. **Wert für** $\sin(\alpha)$
   Berechnen Sie aus den Größen b, h_1, h_2 für beide Messreihen den Wert von $\sin(\alpha)$ unter Verwendung von Gleichung (4.1).

   Ergebnisse:

   $\sin_1(\alpha) =$ ____________ $\sin_2(\alpha) =$ ____________

   Die Fehlerformel zu $\sin(\alpha)$ lautet:

$$\Delta \sin(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{\Delta h_1}{b}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta h_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{-(h_1 - h_2)}{b^2} \cdot \Delta b\right)^2} \tag{6.1}$$

Beweisen Sie diese Fehlerformel mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung und dem folgenden Hinweis.

Hinweis
Der Ansatz für die Gaußsche Fehlerfortpflanzung zur Gleichung (6.1) lautet:

$$\Delta \sin(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{\partial(\sin(\alpha))}{\partial h_1}\Delta h_1\right)^2 + \left(\frac{\partial(\sin(\alpha))}{\partial h_2}\Delta h_2\right)^2 + \left(\frac{\partial(\sin(\alpha))}{\partial b}\Delta b\right)^2} \tag{6.2}$$

Berechnen Sie im zweiten Schritt die entsprechenden Werte der Messunsicherheiten $\Delta \sin(\alpha)$ zu $\sin(\alpha)$ für beide Messreihen.

$\Delta \sin_1(\alpha) =$ ____________ $\Delta \sin_2(\alpha) =$ ____________

Schreiben Sie im Folgenden die Ergebnisse der obigen Berechnungen für beide Messreihen in der Form $\sin(\alpha) = (\text{Wert} \pm \text{Fehler}) \cdot \text{Einheit}$. Runden Sie die Werte auf die jeweils signifikanten Stellen.

2. **Effektive Schwerebeschleunigung g_{eff}**
Bestimmen Sie mit Hilfe von $g_{\text{eff}} = g \cdot \sin(\alpha)$ (Gleichung (4.2)) aus den vorigen Ergebnissen die effektive Schwerebeschleunigung, die auf die Pucks wirkt (Hangabtriebsbeschleunigung). Denken Sie daran, Einheiten anzugeben.

$g_{\text{eff},1} =$ ____________ $g_{\text{eff},2} =$ ____________

Die Fehlerformel zu g_{eff} lautet:

$$\Delta g_{\text{eff}} = g \cdot \Delta \sin(\alpha) \tag{6.3}$$

Beweisen Sie wie zuvor mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung die Fehlerformel zu g_{eff} (Gleichung (4.2)).

Berechnen Sie im zweiten Schritt die Werte der Messunsicherheiten Δg_{eff} für beide Messreihen.

$\Delta g_{\text{eff},1} =$ ____________ $\Delta g_{\text{eff},2} =$ ____________

Geben Sie im Folgenden wie zuvor die Ergebnisse der obigen Berechnungen zur effektiven Schwerebeschleunigung g_{eff} in der Form $g_{\text{eff}} = (\text{Wert} \pm \text{Fehler}) \cdot \text{Einheit}$ für beide Messreihen an. Vergessen Sie nicht dabei geeignet zu runden.

3. **Tischneigungswinkel**
   Geben Sie nun für beide Messreihen den jeweiligen Neigungswinkel $\alpha = \arcsin(\sin(\alpha))$ des Tisches an. Dabei ist $\sin(\alpha)$ gemäß Gleichung (4.1) definiert. Denken Sie an die korrekte Angabe der Einheit des Winkels (Radiant vs. Grad).

$$\alpha_1 = \underline{\qquad\qquad} \qquad \alpha_2 = \underline{\qquad\qquad}$$

Eine mögliche Fehlerformel zum Neigungswinkel α lautet[1]:

$$\Delta\alpha = \frac{1}{b\sqrt{1 - \frac{(h_1-h_2)^2}{b^2}}} \sqrt{(\Delta h_1)^2 + (\Delta h_2)^2 + \left(\frac{h_2 - h_1}{b}\right)^2 \Delta b^2} \tag{6.4}$$

Beweisen Sie diese *oder* die in der Fußnote vorgegebene Fehlerformel durch Anwendung Gaußscher Fehlerfortpflanzung.

[1]Eine andere Variante nutzt nicht die Größen h_1, h_2 und b selbst, sondern dass diese durch die einzelne Größe $\sin(\alpha)$ zusammengefasst werden können. Die Fehlerformel besitzt damit nur noch einen Term und lautet dann $\Delta\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\sin(\alpha)}\Delta\sin(\alpha)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}}\Delta\sin(\alpha)\right)^2}$

(Fortsetzung der Rechnung zu $\Delta\alpha$:)

Berechnen Sie nun die Werte der Messunsicherheiten $\Delta\alpha$ zu α für beide Messreihen.

$$\Delta\alpha_1 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad \Delta\alpha_2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Geben Sie im Folgenden die Ergebnisse der obigen Berechnungen zum Tischneigungswinkel α in der Form $\alpha = (\text{Wert} \pm \text{Fehler}) \cdot \text{Einheit}$ für beide Messreihen an. Vergessen Sie dabei nicht geeignet zu runden.

4. **Mittlere Puckverteilung**
   Berechnen Sie die mittlere Anzahl $\overline{N}$ der Pucks pro Zone.

   Hinweis
   Verwenden Sie die Formel für den Mittelwert, um die mittlere Anzahl der Pucks für jede Zone zu berechnen. (Hier ist k die Zahl der Messungen innerhalb einer Messreihe.)

$$\overline{N} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i$$

   Tragen Sie die aus den Messdaten errechneten mittleren Puckzahlen je Zone in Tabelle 6.1 ein.

[Nr.]	Zone 1	Zone 2	Zone 3	Zone 4	Zone 5	Zone 6	Zone 7	Zone 8	Zone 9
1									
2									

Tabelle 6.1: *Zonenmittelwerte $\overline{N}$ beider Messreihen*

Der Messfehler zum Mittelwert $\Delta\overline{N}$ wird als Standardabweichung des Mittelwertes berechnet. Geben Sie die entsprechende Formel an. (Achten Sie dabei auf eine sorgfältige Angabe von Indizes und Variablen und dass Sie *die Formel nicht mit der Standardabweichung einer Einzelmessung verwechseln!*)

$$\Delta\overline{N} \quad = \quad \underline{\hspace{6cm}}$$

Berechnen Sie nun die Standardabweichung der mittleren Anzahl der Pucks für jede einzelne Zone und für beide Messreihen. Tragen Sie Ihre Ergebnisse in Tabelle 6.2 ein.

[Nr.]	Zone 1	Zone 2	Zone 3	Zone 4	Zone 5	Zone 6	Zone 7	Zone 8	Zone 9
1									
2									

Tabelle 6.2: *Standardabweichungen $\Delta\overline{N}$ der Mittelwerte für beide Messreihen.*

Die Standardabweichung des Mittelwerts ist eine Variante aus der statistischen Mathematik, um die Genauigkeit des Mittelwerts in Abhängigkeit zur Anzahl der Messungen und zu den Einzelmessungen zu bestimmen. In diesem Versuch wird für jede einzelne Zone die Abweichung zum mittleren Wert berechnet.

5. **Diagramm zur mittleren Puckverteilung**
   Fertigen Sie für beide Messreihen jeweils ein Säulendiagramm an, in welchem Sie die mittlere Anzahl der Pucks $\overline{\mathrm{N}}$ gegen die Zonennummer auftragen. Die Werte hierfür entnehmen Sie Tabelle 6.1. Vergessen Sie bitte nicht die Fehlerbalken (Tabelle 6.2).

   Verwenden Sie zum Zeichnen bitte die Diagrammvorlagen in den Abbildungen 6.1 und 6.2.

Abbildung 6.1: *Messreihe 1 Puckverteilung: Grafische Auftragung von $\overline{N}$ in Abhängigkeit der Zone. Nutzen Sie eine sinnvolle Achsenaufteilung, wobei Sie den jeweiligen Wertebereich beachten sollten.*

Abbildung 6.2: *Messreihe 2 Puckverteilung: Grafische Auftragung von $\overline{N}$ in Abhängigkeit der Zone. Nutzen Sie eine sinnvolle Achsenaufteilung, wobei Sie den jeweiligen Wertebereich beachten sollten.*

6. **Logarithmische Auftragung**
Tragen Sie die Werte aus Tabelle 6.1 im nächsten Schritt für beide Messreihen jeweils logarithmisch auf. Um diese Auftragung zu erreichen sind mehrere Schritte notwendig.

Berechnen Sie zuerst $\ln(\overline{N})$ für die Werte von $\overline{N}$ und tragen Sie diese in die folgende Tabelle ein:

[Nr.]	Zone 1	Zone 2	Zone 3	Zone 4	Zone 5	Zone 6	Zone 7	Zone 8	Zone 9
1									
2									

Tabelle 6.3: *Natürlicher Logarithmus der Zonenmittelwerte für beide Messreihen -* $\ln(\overline{N})$

Im nächsten Schritt berechnen Sie die Fehlerwerte $\Delta\ln(\overline{N})$. Die Fehlerformel zu $\ln(\overline{N})$ lautet:

$$\Delta\ln(\overline{N}) = \frac{1}{\overline{N}} \cdot \Delta\overline{N} \tag{6.5}$$

Beweisen Sie mit Hilfe der Gaußchen Fehlerfortpflanzung die Fehlerformel zu $\Delta\ln(\overline{N})$.

Berechnen Sie die Werte für $\Delta\ln(\overline{N})$ und tragen Sie diese in Tabelle 6.4 ein.

[Nr.]	Zone 1	Zone 2	Zone 3	Zone 4	Zone 5	Zone 6	Zone 7	Zone 8	Zone 9
1									
2									

Tabelle 6.4: *Fehler des natürlichen Logarithmus der Zonenmittelwerte für beide Messreihen -* $\Delta\ln(\overline{N})$

Tragen Sie die Werte logarithmisch auf (Diagramme 6.3 & 6.4). Das heißt, Sie verwenden Gleichung (4.4) zur Auftragung und zeichnen somit $\ln(\overline{N})$ als Funktion der

Höhe h.

Bemerkung 1
Gleichung (4.4) erhielten wir durch Logarithmieren beider Seiten von Gleichung (4.3). Das heißt, die zuvor exponentielle Funktion wurde zu einer Funktion der Form:

$$\begin{array}{ccccccc} f(x) & = & a & \cdot & x & + & b \\ \ln(N(h)) & = & -\left(\frac{m\cdot g\cdot\sin(\alpha)}{k_{\mathrm{B}}\cdot\mathrm{T}}\right) & \cdot & h & + & \ln(N_0) \end{array}$$

Dabei ist a die Steigung und b der y-Achsenabschnitt[2].

Bemerkung 2
Die Höhe h ist hier stellvertretend durch die Zonen des Lufttisches dargestellt. Sei z die Zonenzahl, also $z \in \{1, \ldots, 9\}$. Mit der in Tabelle 3.1 angegebenen Zonenbreite LE lässt sich somit der zugehörige Wert der Höhe für jede Zone bestimmen:

$$h(z) = z \cdot \mathrm{LE}$$

Da in diesem Versuch neun Zonen existieren, ist der hier größtmögliche Höhenwert $h(9) = 9 \cdot \mathrm{LE}$. Geben Sie im Folgenden die Zonenbreite LE an und rechnen Sie diese in die SI-Einheit m um:

$$\begin{aligned} \mathrm{LE} &= \underline{\hspace{4cm}}\ \mathrm{cm} \\ &= \underline{\hspace{4cm}}\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

Die Höhe $h(z)$ ist für die Erstellung der Diagramme 6.3 und 6.4 relevant, da diese auf der Abszisse (x-Achse) aufgetragen wird.

7. **Grafische Geradenanpassung zur logarithmischen Auftragung**
   Führen Sie eine grafische Geradenanpassung für beide Messreihen durch. Nutzen Sie dafür auch die Hinweise der entsprechenden Hilfsdokumente der AP-Webseite[3]. Es folgen ein paar Hinweise zum Verständnis einer grafischen Geradenanpassung.

   ### Hinweise zur Durchführung einer Geradenanpassung:
   Betrachten Sie zwei physikalische Größen x und y, zwischen denen ein linearer Zusammenhang besteht. Das heißt es gilt: $y = a \cdot x + b$. Zum Wertepaar (x, y) wurden zuvor beliebig viele Messwerte aufgenommen. (In unserem Fall gilt: $x \mathrel{\widehat{=}} h$ und $y \mathrel{\widehat{=}} \ln(\overline{N})$). Um den Zusammenhang zwischen x und y beschreiben zu können, sind die Parameter a und b und deren Unsicherheiten zu approximieren. Zu diesem Zweck gibt es zwei Methoden zur Näherung: Die rechnerische (auch: numerische) und die grafische Geradenanpassung. Im Rahmen dieses Versuches wählen wir die grafische Anpassung:

   a) Tragen Sie alle Messergebnispaare mit ihren jeweiligen Fehlerbalken auf.

[2]Hinweis: Das b aus dieser Formel ist nicht zu verwechseln mit dem b, das zur Berechnung von $\sin(\alpha)$ verwendet wurde.
[3]`https://astro.uni-koeln.de/AP/`

b) Legen Sie zwei sogenannte Extremalgeraden an die Datenpunkte an. Die eine Gerade mit größtmöglicher Steigung und die andere mit der kleinstmöglichen Steigung. Beide Geraden müssen dabei möglichst genau $\frac{2}{3}$ aller Fehlerbalken treffen. Von den anderen Datenpunkten sollten sie nicht weiter als die doppelte Fehlerbalkenlänge entfernt sein.

   Wenn die Messwerte so stark streuen, dass die zuvor beschriebenen Regeln für die Wahl der Extremalgeraden nicht eingehalten werden können, bedeutet dies in einigen Fällen, dass die Messfehler zu klein geschätzt wurden. In dem Fall sollte man die Fehlerabschätzung überdenken und falls möglich korrigieren. Falls eine erneute Fehlerabschätzung nicht sinnvoll oder durchführbar erscheint, sollte anstelle der grafischen die rechnerische Geradenanpassung durchgeführt werden.

c) Ermittlen Sie im nächsten Schritt zu den Extremalgeraden jeweils die Steigungen a_{min} und a_{max} sowie die y-Achsenabschnitte b_{min} und b_{max}.

   Zur Erinnerung: Zu diesem Zweck zeichnen Sie an jede Extremalgerade ein möglichst großes Steigungsdreieck, um die Steigungen zu bestimmen und lesen Sie die y-Achsenabschnitte als Werte der Geraden bei $x = 0$ ab. Die entsprechenden Funktionsvorschriften lauten:

$$y_{\text{min}} = a_{\text{min}} \cdot x + b_{\text{min}} \qquad\qquad y_{\text{max}} = a_{\text{max}} \cdot x + b_{\text{max}}$$

d) Aus diesen Parametern der Extremalgeraden bestimmen Sie schließlich die Parameter der Ausgleichsgeraden als Mittelwert und dessen Standardabweichung:

$$a = \frac{a_{\text{max}} + a_{\text{min}}}{2} \qquad\qquad \Delta a = \frac{|a_{\text{max}} - a_{\text{min}}|}{2}$$

$$b = \frac{b_{\text{max}} + b_{\text{min}}}{2} \qquad\qquad \Delta b = \frac{|b_{\text{max}} - b_{\text{min}}|}{2}$$

e) Im letzten Schritt zeichnen Sie die ermittelte Ausgleichsgerade in das Diagramm ein. Dieser Vorgang hilft zum einen auf Konsistenz, zum anderen auf Korrektheit der Berechnungen zu überprüfen.

Führen Sie im Folgenden die Berechnungen zur grafischen Geradenanpassung durch und vergessen Sie nicht, die grafischen Auftragungen der Diagramme 6.3 und 6.4 um die oben genannten jeweiligen Schritte zeichnerisch zu ergänzen.

Abbildung 6.3: *Messreihe 1: Grafische Auftragung von* $\ln(\overline{N})$ *in Abhängigkeit der Höhe* h. *Nutzen Sie eine sinnvolle Achsenaufteilung, wobei Sie den jeweiligen Wertebereich beachten sollten.*

Abbildung 6.4: *Messreihe 2: Grafische Auftragung von* $\ln(\overline{N})$ *in Abhängigkeit der Höhe* h*. Nutzen Sie eine sinnvolle Achsenaufteilung, wobei Sie den jeweiligen Wertebereich beachten sollten.*

8. **Geradengleichung zur grafischen Anpassung**
Geben Sie die Geradengleichung zur grafischen Geradenanpassung zu Messreihe 1 und 2 jeweils in der folgenden Form an:

$$\ln(\overline{N}) = (a \pm \Delta a) \left[\frac{1}{\mathrm{m}}\right] (\pm \ldots \%) \cdot x + (b \pm \Delta b)\,(\pm \ldots \%)$$

Geradengleichung zu Messreihe 1

$\ln(\overline{N}) =$ ____

Geradengleichung zu Messreihe 2

$\ln(\overline{N}) =$ ____

9. **Berechnung der Gastemperatur**
Aus der Steigung der Geraden lässt sich die Temperatur T des Gases berechnen. Verwenden Sie die Formel für die Steigung mit der effektiven Schwerebeschleunigung g_{eff} der Pucks. Falls nötig, schauen Sie sich erneut den Zusammenhang zwischen Steigung und Temperatur an (siehe Bemerkung 1 zuvor). Leiten Sie im Folgenden eine Formel für T her:

Berechnen Sie die Gastemperatur für beide Messreihen.

$T_1 =$ ____________________ K $\qquad T_2 =$ ____________________ K

Im letzten Schritt berechnen Sie den Fehler zur Gastemperatur ΔT mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung. Die Fehlerformel zu ΔT lautet:

$$\Delta T = T \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta g_{\mathrm{eff}}}{g_{\mathrm{eff}}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2} \tag{6.6}$$

Beweisen Sie wie zuvor die Fehlerformel zu ΔT.

Berechnen Sie für beide Messreihen jeweils den Fehler zur Gastemperatur.

$\Delta T_1 =$ ____________________ K $\qquad \Delta T_2 =$ ____________________ K

Geben Sie im Folgenden die Ergebnisse der obigen Berechnungen zur Gastemperatur T in der Form $T = (\text{Wert} \pm \text{Fehler}) \cdot \text{Einheit}$ für beide Messreihen an. Vergessen Sie nicht geeignet zu runden.

7 Diskussion

Listen Sie alle Ergebnisse übersichtlich auf, das heißt die berechneten Temperaturen mit den zugehörigen Neigungswinkeln (inklusive Einheit und Fehler!).

Messreihe	Winkel	Temperatur
1		
2		

Bewerten Sie Ihre Ergebnisse:

Gehen Sie auf die folgenden Punkte näher ein:

- Entsprechen die Verläufe aller Graphen Ihren Erwartungen?
- Welche Fehlerquellen gibt es in diesem Versuch?

Gehen Sie auf die folgenden Punkte näher ein:

- Vergleichen Sie die Temperaturen für die beiden Messreihen. Was waren Ihre Erwartungen und stimmen die Ergebnisse mit Ihren Erwartungen überein?
- Wie lassen sich die hohen Temperaturen erklären?

gesehen: ____________________ ______________________________

(Datum) (Unterschrift Versuchsassistenz)

8 Quellen und weiterführende Literatur

- Fehlerrechnung:
  Hinweise zur Fehlerrechnung entnehmen Sie bitte der www-Seite des Praktikum A unter:
  `https://astro.uni-koeln.de/AP`

- Demtröder: Experimentalphysik 1, Springer, 2018
  `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-54847-9`
  [Zugang aus dem Netz der Uni Köln (UKLAN) möglich]

- Meschede, Gerthsen Physik, Springer Berlin Heidelberg, 25. Aufl. 2015. Neuauflage 2015
  `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-45977-5`
  [Zugang aus dem Netz der Uni Köln (UKLAN) möglich]

- Bergmann und Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 1, "Mechanik, Akustik, Wärme", Boston: De Gruyter, 9., verb. Aufl. Reprint 2018
  `https://doi.org/10.1515/9783111628882`
  [Zugang aus dem Netz der Uni Köln (UKLAN) möglich]

- Halliday: Physik, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 3. Auflage, 2018
  `https://ebookcentral.proquest.com/lib/ubkoeln/detail.action?docID=5085141` [Zugang aus dem Netz der Uni Köln (UKLAN) möglich]

- Walcher, Elbel und Fischer: Praktikum der Physik, Vieweg+Teubner

- Westphal: Physikalisches Praktikum, Vieweg+Teubner

Feedback

Hier ist nach Ihrem Feedback zu dieser Anleitung gefragt. Gibt es etwas, das Sie an der Versuchsanleitung inhaltlich oder technisch ändern würden? Ist beispielsweise etwas nicht oder unzureichend erklärt, Lücken zu klein, etc.? Änderungsvorschläge könnten schon für die nächsten Praktikumsteilnehmer umgesetzt werden.