

I. Physikalisches Institut  
Universität zu Köln

# W09: Strahlungsgesetze



## PRAKTIKUM A FÜR NEBENFÄCHLER

Version vom 2. Juni 2023

Abzugeben bis: \_\_\_\_\_

Assistent: \_\_\_\_\_

Gruppenmitglieder: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## Wichtige Informationen

Zur Bearbeitung ist es zwingend erforderlich, dass Sie sich mit den Grundlagen der Fehlerrechnung (u. a. Gaußsche Fehlerfortpflanzung, (gewichteter) Fehler des Mittelwerts, grafische Geradenanpassung) vertraut machen. Informationen dazu finden Sie beispielsweise im Dokument „allgemeine Hilfen für das Praktikum A“ auf der Webseite des A-Praktikums<sup>a</sup>.

Aufgrund des Umfangs dieses Versuchs ist es nötig die Blätter mittels Schnellhefter o. ä. zu binden. Bitte lochen Sie die Blätter und heften Sie diese sorgfältig ein. Sollte die Form der Abgabe nicht den Regularien entsprechen, kann die\*der Assistent\*in die Annahme der Auswertung verweigern.

Versuchen Sie innerhalb der vorgegebenen Lücken zu bleiben. Diese geben ungefähr den an entsprechender Stelle erwarteten Umfang vor. Sollte der Platz dennoch nicht ausreichen, fügen Sie ganze Blätter ein, auf welchen deutlich markiert ist, was wozu gehört.

Beachten Sie bitte, dass alle entsprechenden Lücken und Fragestellungen ausgefüllt und beantwortet werden müssen. Insbesondere sind Lücken bis hin zum Messprotokoll bereits vor dem Versuchstag zu bearbeiten. Dies müssen Sie vor Ort nachweisen und wichtige Inhalte frei wiedergeben können. Es wird davon ausgegangen, dass alle Gruppenmitglieder die vollständige Anleitung durchgelesen und verstanden haben. Sollten Sie am Versuchstag nicht ausreichend auf den Versuch vorbereitet sein, wird die\*der Assistent\*in Sie nicht am Versuch teilnehmen lassen.

Die Abgabe muss alle Seiten umfassen, insbesondere aber Seiten mit auszufüllenden Lücken. Dazu gehören in jedem Fall die Titelseite, die Vorbereitung, das Messprotokoll und die Auswertung mit Diskussion.

---

Alle auf dem Deckblatt aufgeführten Gruppenmitglieder sind für die Bearbeitung und fristgerechte Abgabe des Versuchsberichts bzw. dessen erforderlichen Korrekturen zuständig und verantwortlich. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass Sie sich mit den Regeln des A-Praktikums<sup>a</sup> vertraut gemacht haben.

<sup>a</sup> zu finden unter: <https://www.astro.uni-koeln.de/AP/>

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Vorbereitung (vor dem Praktikum, zu Hause)</b>	<b>2</b>
2.1	Wärmetransport . . . . .	2
2.2	Thermische Emission und Kirchhoffs Strahlungsgesetz . . . . .	4
2.3	Schwarzkörperstrahlung . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Versuchsaufbau</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Benötigte Formeln</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>Durchführung (im Praktikum)</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>Auswertung (zu Hause)</b>	<b>18</b>
6.1	Nachweis des Stefan-Boltzmann Gesetzes . . . . .	18
6.1.1	Vorbereitung: Rechnerische Geradenanpassung . . . . .	21
6.1.2	Schwarze Würfelseite . . . . .	22
6.1.3	Weißer Würfelseite . . . . .	24
6.1.4	Matte Würfelseite . . . . .	26
6.1.5	Spiegelnde Würfelseite . . . . .	28
6.2	Bestimmung der Emissivität . . . . .	30
<b>7</b>	<b>Diskussion der Ergebnisse (zu Hause)</b>	<b>32</b>
<b>8</b>	<b>Anhang zur Fehlerrechnung</b>	<b>35</b>
8.1	Gaußsche Fehlerfortpflanzung . . . . .	35
8.2	Grafische Geradenanpassung . . . . .	36
8.3	Rechnerische Geradenanpassung . . . . .	39
<b>9</b>	<b>Literatur</b>	<b>40</b>

# 1 Einleitung

In diesem Versuch werden Sie das Phänomen der Wärmestrahlung untersuchen und sich mit den physikalischen Gesetzmäßigkeiten um reale und ideale Strahler befassen, deren Erforschung maßgeblich zum Beginn der Epoche der modernen Physik beitrug. Der Versuch soll Ihnen die konzeptionellen Zusammenhänge zwischen der Temperatur eines Körpers und der durch ihn abgestrahlten elektromagnetischen Energie näherbringen und Sie mit den Begrifflichkeiten rund um die gängigen Strahlungsgesetze vertraut machen, insbesondere des Kirchhoffschen und des Planckschen Strahlungsgesetzes.

## 2 Vorbereitung (vor dem Praktikum, zu Hause)

### 2.1 Wärmetransport

Eine der großen Fragen der klassischen Physik war die nach der Natur der thermischen Wechselwirkung zwischen zwei Stoffen verschiedener Temperatur.

Aus der Thermodynamik (und natürlich der Alltagserfahrung) ist bekannt, dass zwei Körper unterschiedlicher Temperatur, die miteinander in Berührung stehen, in einer gewissen Zeit einer gemeinsamen Gleichgewichtstemperatur zustreben. Ein solcher direkter Austausch von Energieströmen zwischen beiden Körpern wird als **Wärmeleitung** bezeichnet.

Eine andere bekannte Form des Wärmetransports besteht in der sogenannten **Konvektion**, der Übertragung von Wärmeenergie durch einen Teilchenstrom von einem Reservoir auf ein anderes. Beide Varianten zeichnen sich dadurch aus, dass es zu einem mittelbaren oder unmittelbaren physischen Kontakt zwischen den beteiligten Stoffen kommt, der Übertragungsweg des Wärmetransportes ist also anschaulich nachvollziehbar.

Bei der **Wärmestrahlung**, dem letzten großen Transportmechanismus, ist es weniger offensichtlich. Es war schon früh klar, dass eine Übertragung von Wärme durch Sonnenlicht unabhängig vom Vorhandensein eines stofflichen Mediums (z. B. erwärmte Luftströme) möglich ist und eine Bestrahlung eines Objekts mit sichtbarem Licht zu einem Temperaturanstieg führt. In der Neuzeit wurde dann zusätzlich demonstriert, dass auch nicht sichtbar leuchtende, heiße Körper eine Form von Strahlung abgeben, mit der ein zweites Objekt erwärmt werden kann.

Um 1800 kam es zu einer bedeutenden Entwicklung, als der Astronom Friedrich Wilhelm Herschel das Sonnenlicht mittels eines Prismas in der in Abb. 2.1 dargestellten Versuchsanordnung untersuchte. Herschel nutzte die lichtbrechenden Eigenschaften des Prismas, um die eingehenden Sonnenstrahlen in ihre farblichen Bestandteile, ihr sogenanntes Spektrum, zu zerlegen, und platzierte dann ein Thermometer in jedem Farbbereich. Mit dieser Frühform eines Spektrometers versuchte er, die Wärmeenergie der verschiedenen Farbkomponenten zu untersuchen, und gelangte dabei zu zwei Beobachtungen:

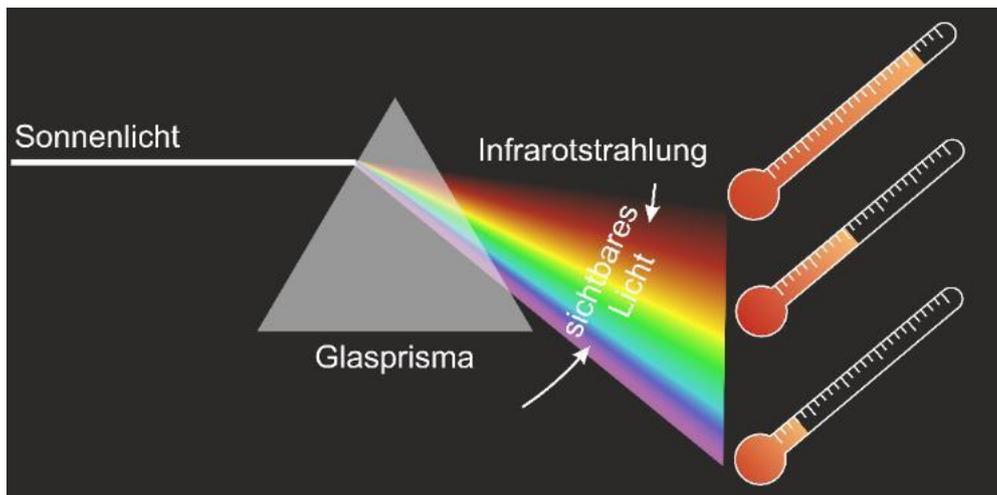
1. Die Temperatur nahm vom blauen zum roten Teil des Spektrums hin zu.<sup>1</sup>
2. Die höchste gemessene Temperatur lag in einem Bereich außerhalb des sichtbaren Regenbogens, jenseits des rötlichen Teils.

---

<sup>1</sup>Die Tatsache, dass Herschel für röteres Licht größere Temperaturen maß, ist ein Effekt der Dispersionskurve des Prismas und keine Eigenschaft des Lichts oder der Wärmestrahlung. Die Konsistenz des Temperaturanstiegs in den infraroten Bereich hinein zeigt jedoch, dass die Infrarotstrahlung dasselbe Brechungsverhalten aufweist wie das sichtbare Licht. Siehe auch: Bildbeschreibung bei Abb. 2.1.

Damit hatte Herschel nicht nur nachgewiesen, dass das Spektrum der Sonne einen Anteil unsichtbarer Strahlung beinhaltet, sondern hatte auch ein erstes Indiz dafür, dass sich diese Wärmestrahlung hinsichtlich ihrer optischen Eigenschaften ähnlich wie sichtbares Licht verhielt.

Er wurde damit einer der ersten Verfechter einer Idee, die heute als anerkannte physikalische Tatsache gilt, nämlich dass Licht- und Wärmestrahlung Teil eines gemeinsamen, allgemeineren Kontinuums sind. Dieses Kontinuum kennen wir heute als elektromagnetische Strahlung (EM-Strahlung).



**Abbildung 2.1:** Die Abbildung zeigt den prinzipiellen Aufbau, den Herschel für sein Experiment benutzt hat. Das Prisma verteilt das blauere Licht über einen größeren Bereich als das röttere Licht. In Folge ist die am Thermometer eingehende Energiedichte geringer, weshalb für blau eine geringere Temperatur gemessen wurde und für die unsichtbare Infrarotstrahlung die höchste.

### Fragen:

1. Die von Herschel beobachtete unsichtbare Strahlung wurde später Infrarotstrahlung (d. h. "unter rot"-Strahlung) getauft und gilt heute als Teil des elektromagnetischen Spektrums. Gibt es ein Gegenstück "über blau", also oberhalb der blauen Kante des sichtbaren Lichtes? Nennen Sie insgesamt drei Bereiche des elektromagnetischen Kontinuums.

---

---

---

---

2. In diesem Versuch werden Sie versuchen, die Wärmestrahlung eines Körpers zu messen. Sehen Sie sich den Versuchsaufbau, wie er in Abschnitt 3 dargestellt wird, an. Spielen die anderen beiden Transportmechanismen hier eine Rolle?

---

---

---

---

---

---

---

## 2.2 Thermische Emission und Kirchhoffs Strahlungsgesetz

Eine Erkenntnis aus der Elektrodynamik besagt, dass eine beschleunigte Ladung elektromagnetische Wellen abstrahlt. Diese Einsicht führt uns zum Ursprung der elektromagnetischen Wärmestrahlung, die von einem Körper einer bestimmten Temperatur ausgesendet wird: Die Temperatur eines Körpers ist ein Maß für die in ihm gespeicherte thermische Energie, unter welcher wir üblicherweise die kinetische Energie der thermischen Bewegung der Atome und Moleküle verstehen. In Abhängigkeit von der Temperatur kommt es also im Körper zu kinetischen Wechselwirkungen zwischen den Teilchen und in Folge zu Beschleunigungen der geladenen Protonen und Elektronen in der Form von Dipoloszillationen, die in der Ausstrahlung elektromagnetischer Energie resultieren.

Ein Körper der Temperatur  $T$  strahlt also eine gewisse elektromagnetische **Leistung**  $P(T)$  ab, die im Allgemeinen auch richtungsabhängig ist. Wir gehen der Einfachheit halber von einem isotropen Strahler aus, d. h. der Körper strahlt seine Energie in alle Raumrichtungen gleichermaßen ab. Die genaue Abhängigkeit dieser Leistung von der Temperatur kennen wir noch nicht, aber wir können schon ein paar Schlussfolgerungen über die Auswirkungen der Materialeigenschaften des Körpers auf  $P$  anstellen, indem wir ein thermodynamisches Gedankenexperiment bemühen.

Zunächst wissen wir aus der Alltagserfahrung, dass unterschiedliche Oberflächen auf sie einfallende Strahlung unterschiedlich gut absorbieren bzw. reflektieren. Eine matte Oberfläche reflektiert weniger Licht als eine spiegelnde, ein schwarzes Hemd erhitzt sich in der Sonne schneller als ein weißes etc. Wir quantifizieren diese Eigenschaft mittels eines **Absorptionsgrades**  $\alpha$ , welcher implizit auch den Reflexionsgrad über  $(1 - \alpha)$  definiert<sup>2</sup>. Ein Absorptionsgrad von 1 bedeutet, dass die gesamte einfallende Strahlung vollständig von der Oberfläche absorbiert wird. Einen solchen perfekten Absorber nennen wir 'schwarz', weil historisch in der Regel von der Absorption des sichtbaren Lichts gesprochen wurde. Im Allgemeinen ist der Absorptionsgrad jedoch abhängig von der betrachteten Wellenlänge, d. h. eine Oberfläche kann beispielsweise zwischen 450 und 750 nm weniger, aber im Infraroten

---

<sup>2</sup>Unter der Annahme, dass der Transmissionsgrad 0 und der Körper also undurchsichtig ist.

mehr absorbieren.

Wir wollen nun zeigen, dass die Absorptionsfähigkeit der Oberfläche auch ein Maß für ihre Emissionsfähigkeit ist, also dass die von einem Körper thermisch abgestrahlte Leistung vom Absorptionsgrad abhängt. Nehmen wir den Fall zweier Körper an, die sich in einem abgeschlossenen<sup>3</sup> Vakuum befinden und nur über ihre Strahlungswirkung Energie austauschen können. Beide Körper befinden sich im thermischen Gleichgewicht, haben also dieselbe Temperatur  $T$ , und emittieren Strahlungsleistungen  $P_1, P_2$ . Die Oberflächen der Körper sind aus unterschiedlichen Materialien gemacht und weisen darum auch zwei unterschiedliche Absorptionsgrade  $\alpha_1, \alpha_2$  auf. Die von Körper 1 aufgenommene Strahlungsleistung ist also  $\alpha_1 P_2$ . Die Strahlung, die der erste Körper emittiert, muss nun gleich der absorbierten Leistung sein:

$$P_1 = \alpha_1 P_2 \quad (2.1)$$

Dies ist zwingend erforderlich, andernfalls würde sich die Temperatur des ersten Körpers aus sich selbst heraus erhöhen und die Grundsätze der Thermodynamik wären verletzt. Die von 1 abgestrahlte Leistung ist also gemäß Gl. (2.1) proportional zu seinem eigenen Absorptionsgrad. Ein perfekter schwarzer Absorber würde dann im thermischen Gleichgewicht auch die größtmögliche Strahlungsleistung emittieren. Über diese Überlegung definieren wir den **Emissionsgrad**  $\epsilon$  eines Körpers als das Verhältnis abgestrahlter Leistung zwischen dem Körper und einem perfekten schwarzen Absorber.

Nun denken wir uns eine zu unserem ursprünglichen Gedankenexperiment analoge Situation mit einem perfekten schwarzen Strahler (d. h.  $\alpha = 1$ ) und einem gewöhnlichen Strahler und erhalten dann die Beziehung:

$$P = \alpha P_S \quad (2.2)$$

Aus der Definition des Emissionsgrades folgt somit unmittelbar

$$\epsilon = \alpha \quad (2.3)$$

Unter dem Kirchhoffschen Strahlungsgesetz versteht man meist<sup>4</sup> den durch Gleichung (2.3) beschriebenen Zusammenhang. Der Emissionsgrad und der Absorptionsgrad eines Körpers sind also gleich, insbesondere gilt für einen **idealen Schwarzkörper** auch  $\epsilon = \alpha = 1$ . Ein perfekter Absorber ist also auch ein perfekter Wärmestrahler.

---

<sup>3</sup>Wir gehen davon aus, dass die Wände des Vakuums perfekt verspiegelt sind und die gesamte Strahlungsleistung beim Empfänger ankommt. Diese Annahme lässt uns auf Überlegungen hinsichtlich der Strahlung in einen bestimmten Raumbereich verzichten und erspart uns etwas Schreibarbeit.

<sup>4</sup>Die Verwendung ist nicht immer einheitlich, manchmal wird auch Gleichung (2.2) darunter verstanden.

**Fragen:**

1. Mit welchen Parametern lassen sich elektromagnetische Wellen im Allgemeinen beschreiben? In welcher Beziehung steht EM-Strahlung zu Wärmestrahlung?

---

---

---

---

2. Das elektromagnetische Spektrum wird anhand der Frequenzen/Wellenlängen in zusammenhängende Bereiche, sogenannte Bänder, unterteilt. In welchen Wellenlängenbereich fällt das sichtbare Licht? Wie ist es mit Infrarot? Vergleichen sie die Bandbreite beider Bereiche.

---

---

---

3. Abbildung 2.2 zeigt die elektrische Komponente einer ebenen eindimensionalen Welle zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$ . Welche Wellenlänge und Amplitude hat sie? Markieren Sie in der Abbildung, wo sie die jeweilige Größe ablesen können.

---

4. Nehmen Sie an, ein Körper sitzt in einem abgeschlossenen Raum auf Umgebungstemperatur. Alle anderen Objekte in dem Raum, einschließlich der darin enthaltenen Luft, haben ebenso dieselbe Umgebungstemperatur. Sendet der Körper Wärmestrahlung aus? Warum?

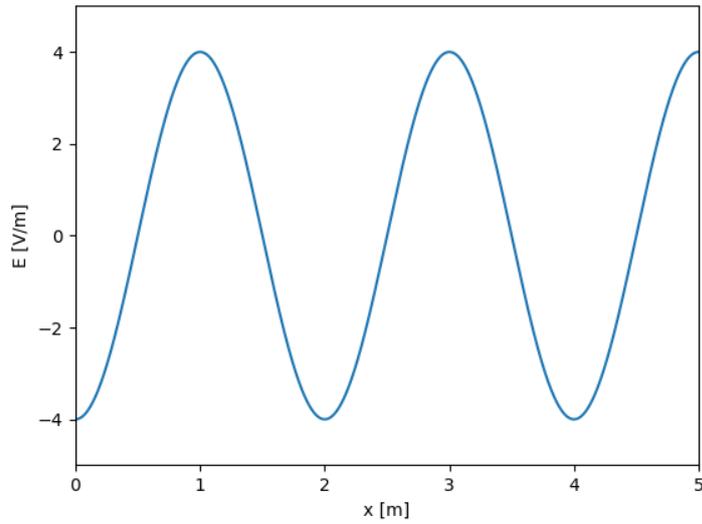
---

---

---

---

5. Wie ist die physikalische Leistung definiert?



**Abbildung 2.2:** Darstellung einer eindimensionalen elektromagnetischen Welle zu einem festen Zeitpunkt  $t$ . Zeichnen Sie die in Frage 3 geforderten Größen ein.

- 
6. Ist der Emissionsgrad eines Körpers im infraroten Wellenlängenbereich im Allgemeinen gleich seinem Emissionsgrad im Bereich des sichtbaren Lichts?

---



---

7. Hat eine (optisch) weiße Oberfläche immer einen geringeren Absorptionsgrad als eine (optisch) schwarze? Begründen Sie.

---



---



---



---

8. Geben Sie die Definition des Emissionsgrades als Formel an.

---

9. In diesem Versuch werden sie die Emissionsgrade verschiedener Oberflächen untersuchen. Was für Größen müssten Sie kennen, um  $\epsilon$  im Experiment zu bestimmen? Wie könnten Sie diese messen?

---

---

---

---

---

---

---

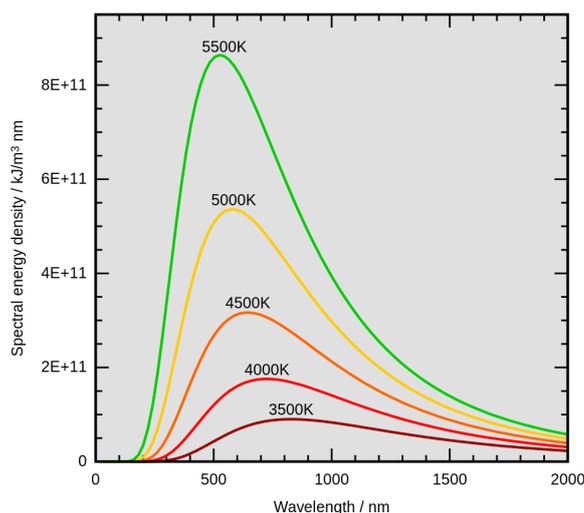
---

## 2.3 Schwarzkörperstrahlung

Wir kennen jetzt die Beziehung zwischen der abgestrahlten Leistung eines idealen schwarzen Strahlers und eines realen Strahlers. Was uns nun interessiert sind die Gesetze, welche die absolute Emission eines Schwarzkörpers beschreiben. Um hier einen Zugang zu finden, wollen wir uns die Charakteristiken eines perfekten Schwarzkörpers noch einmal vor Augen führen:

1. Alle eingehende Strahlung aller Wellenlängen wird vollständig absorbiert, es findet keine Reflektion an seiner Oberfläche statt.
2. Die gesamte aufgenommene Strahlungsenergie wird als Wärmestrahlung re-emittiert.
3. Die gesamte Strahlung verbleibt im Schwarzkörper (zumindest bis zur Re-Emission als Wärmestrahlung). Es wird nichts transmittiert, d. h. der Körper ist komplett undurchsichtig.

Frühe experimentelle Behandlungen der idealen Schwarzkörper versuchten, diese durch sogenannte Hohlraumstrahler zu approximieren, um in Abhängigkeit ihrer Temperatur spektrale Energieverteilungen wie in Abb. 2.3 dargestellt zu messen.



**Abbildung 2.3:** Spektrale Energiedichteverteilung eines idealen Schwarzkörpers in Abhängigkeit seiner Wellenlänge und Temperatur.

Die hier abgebildete Beziehung zwischen spektraler Energiedichte, Wellenlänge (oder Frequenz, je nach Formulierung) und der Temperatur des schwarzen Strahlers wird durch das **Plancksche Strahlungsgesetz** beschrieben:

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(k_B T)} - 1} \quad (2.4)$$

Hier sind  $h$  das sogenannte Wirkungsquantum,  $k_B$  die Boltzmannkonstante,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit und  $\nu$  die Frequenz der Strahlung.

Plancks Gesetz steht am Ende eines langwierigen Erkenntnisprozesses im Wissenschaftsbetrieb des ausgehenden 19. Jahrhunderts und gibt nicht nur die Lösung eines mit den Mitteln der klassischen Physik nicht lösbaren thermodynamischen Problems vor, sondern markiert durch die Einführung der Quantenhypothese auch den Beginn der modernen Epoche der Physik.

Aus Plancks Gesetz lässt sich das nach Wilhelm Wien benannte **Wiensche Verschiebungsgesetz** ableiten:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} \quad (2.5)$$

Dabei ist  $b$  eine Proportionalitätskonstante.

Das Wiensche Verschiebungsgesetz gibt die Wellenlänge (oder Frequenz<sup>5</sup>) der größten Energiedichte an. In anderen Worten: Das Gesetz beschreibt, wie sich das Maximum der in Abb. 2.3 gezeigten Planckkurven in Abhängigkeit der Temperatur nach rechts oder links verschiebt.

In Gleichung (2.4) wird die spektrale Strahlendichte pro Einheitsfläche, pro Einheitsraumwinkel und pro Einheitsfrequenz beschrieben. Wir sind nun aber in unserem Experiment vorrangig an der von unserem Empfänger gemessenen Leistung über alle Frequenzen insgesamt interessiert und hätten gerne einen Ausdruck, der diese Leistung mit der Temperatur des Strahlers in Verbindung bringt. Durch Integration der spektralen Strahlendichte über die zuvor genannten Einheitsgrößen<sup>6</sup> ergibt sich das **Stefan-Boltzmann Gesetz**<sup>7</sup>:

$$P = \sigma AT^4 \quad (2.6)$$

Dies ist die Formel, mit welcher Sie in diesem Experiment die Emissionsgrade bestimmen werden.

---

<sup>5</sup>Wiens Verschiebungsgesetz liefert sehr unterschiedliche Resultate, je nachdem ob das Plancksche Strahlungsgesetz über Wellenlänge oder Frequenz formuliert wird. In Frequenzdarstellung ergibt sich für das Wiensche Verschiebungsgesetz die Form  $\nu_{\max} = b'T$ , wobei  $b'$  eine neue Proportionalitätskonstante ist, mit  $b \neq b'$  und insbesondere  $c \neq \lambda_{\max}\nu_{\max}$ . Die qualitative Aussage, dass sich das Maximum mit fallenden Temperaturen zu höheren Wellenlängen verschiebt, bleibt jedoch gleich.

<sup>6</sup>Obwohl Plancks Gesetz hier als spektrale Strahlendichte repräsentiert wird, gibt es viele verschiedene, gleichwertige Darstellungen, welche insbesondere die Fläche und den Raumwinkel unterschiedlich einbeziehen. Deshalb sind an dieser Stelle diese zwei Größen etwas weniger relevant und es ist wichtiger zu bemerken, dass zum Erreichen des Stefan-Boltzmann Gesetzes über alle Frequenzen integriert wird.

<sup>7</sup>Aus didaktischen Gründen steht das Stefan-Boltzmann Gesetz am Ende dieses Abschnitts. Historisch gesehen war es allerdings das erste der hier erläuterten Gesetze und gab den Anstoß für die weiteren Entwicklungen, die zur Quantenhypothese führten.

**Fragen:**

1. Gl. (2.4) gibt die spektrale Energiedichte eines idealen Schwarzkörpers an. In welchen Einheiten wird diese angegeben?<sup>8</sup>

---

2. Was besagt die Quantenhypothese? Welchen Wert und welche Einheit hat das Wirkungsquantum  $h$ ?

---

---

---

3. In Plancks Strahlungsgesetz kommt der Ausdruck  $h\nu$  vor. Sie werden feststellen, dass die zusammengesetzten Einheiten dieses Ausdrucks eine Energie beschreiben. Um was für eine Energie handelt es sich?

---

4. Mit welchem Ansatz kann man Wiens Verschiebungsgesetz aus Gl. (2.4) herleiten?

---

---

5. In Gl. (2.5) kommt die Konstante  $b$  vor. Welchen Wert hat sie?

---

6. Berechnen Sie mit Hilfe des Wienschen Verschiebungsgesetzes diejenige Wellenlänge, bei welcher a) ein Topf kochendes Wasser ( $T \approx 100^\circ C$ ) und b) ein Topf Wasser auf Raumtemperatur ( $T \approx 20^\circ C$ ) jeweils die größte Strahlungsleistung emittiert. Übertragen Sie dazu die Temperaturen zunächst von der Celsius- auf die Kelvin-Skala, bevor

---

<sup>8</sup>Das Plancksche Strahlungsgesetz wird teilweise in verschiedenen Formen angegeben. In manchen Experimentalphysiklehrbüchern werden Sie das Gesetz eher mit einem zusätzlichen Faktor von  $\frac{4\pi}{c}$  finden, wohingegen Gl. (2.4) der in der Astrophysik üblichen Konvention folgt. Der Unterschied besteht darin, dass der Raumwinkel in der astrophysikalischen Variante noch nicht ausintegriert wurde. Die Einheiten der spektralen Energiedichte unterscheiden sich entsprechend je nach betrachteter Formulierung des Gesetzes.

Sie sie in die Formel einsetzen. Was müssen Sie zur Umrechnung tun? In welchem Bereich des elektromagnetischen Kontinuums befinden sich die beiden Maxima? Vergleichen Sie damit nun die Photosphäre der Sonne mit einer Temperatur von  $\approx 5500\text{ K}$ . In welchem Bereich befindet sich ihr Strahlungsmaximum?

---

---

---

---

---

7. Das Stefan-Boltzmann Gesetz kann aus dem Planckschen Strahlungsgesetz durch Integration unmittelbar hergeleitet werden. Worüber muss integriert werden?

---

---

8. Konkret werden Sie in diesem Experiment das Stefan-Boltzmann Gesetz in folgender Form nutzen:

$$P - P_0 = \sigma A(T^4 - T_r^4) \tag{2.7}$$

P ist die Leistung des Strahlers, T seine absolute Temperatur und  $T_r$  die absolute Umgebungstemperatur. Was ist  $P_0$ ?

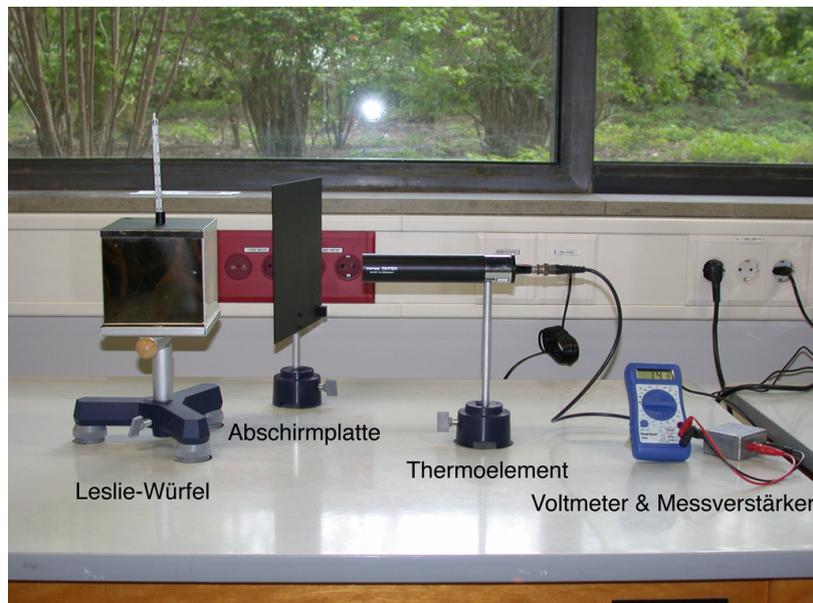
---

### 3 Versuchsaufbau

Als strahlender Körper wird in diesem Experiment ein Leslie-Würfel verwendet, der mit heißem Wasser gefüllt ist. Die Seiten dieses Würfels besitzen unterschiedliche Oberflächen: Eine Seite ist schwarz, eine weiß, eine verspiegelt und eine matt. Aufgabe ist es, die Wärmestrahlung jeder dieser Würfelseiten für verschiedene Temperaturen zu messen.

Dazu verwenden wir folgende Anordnung (siehe Abb. 3.1): Der Leslie-Würfel wird mit kochendem Wasser gefüllt und mit einer Würfelseite senkrecht zur Thermosäule ausgerichtet. Die Thermosäule wandelt die auftreffende Wärmestrahlung in elektrische Spannung um, die verstärkt wird und am Voltmeter abgelesen werden kann. Die elektrische Spannung ist dabei proportional zur Wärmestrahlung. Zur Bestimmung der Wärmestrahlung des umgebenden Raumes dient eine Abschirmplatte, die zwischen Leslie-Würfel und Thermosäule positioniert wird. Die Temperatur des Leslie-Würfels wird am Thermometer abgelesen, das im Deckel des Würfels steckt.

Da die Thermosäule sehr empfindlich ist und auch kleinste Änderungen registriert, befindet sich der gesamte Aufbau in einer Kiste, die Störungen durch Bewegung, Zugluft und Wärmestrahlung der Praktikanten abmildern soll.



**Abbildung 3.1:** Foto des Versuchsaufbaus.

## 4 Benötigte Formeln

Das Stefan-Boltzmann-Gesetz gibt die thermische Strahlungsleistung  $P$  eines schwarzen Körpers der Fläche  $A$  als Funktion seiner absoluten Temperatur  $T$  an. Es lautet:

$$P = \sigma \cdot A \cdot T^4 \quad (4.1)$$

mit der Stefan-Boltzmann-Konstanten  $\sigma$ . Die Strahlungsleistung eines schwarzen Körpers ist somit proportional zur vierten Potenz seiner absoluten Temperatur,  $P \sim T^4$ .

Emittiert ein Körper mehr Strahlung, als er absorbiert, dann kühlt er dadurch ab; absorbiert er mehr als er emittiert, dann wärmt er sich auf. Im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung absorbiert und emittiert der Körper im gleichen Ausmaß.

Um die Nettostrahlungsleistung eines Körpers der Temperatur  $T$  zu erhalten, muss demnach die Strahlung der Umgebung  $P_0$  bei der Temperatur  $T_r$  mit berücksichtigt werden. Die Nettostrahlungsleistung ergibt sich durch:

$$P - P_0 = \sigma \cdot A \cdot (T^4 - T_r^4) \quad (4.2)$$

# 5 Durchführung (im Praktikum)

## Allgemeine Hinweise:

Bei diesem Versuch werden Sie mit kochendem Wasser arbeiten. Gehen Sie entsprechend vorsichtig vor, um sich und Ihre Mitpraktikant\*innen vor Verletzungen zu schützen. Achten Sie auf einen angemessenen Sicherheitsabstand zwischen Wasser und elektronischen Geräten, insbesondere den Stromleisten. Sollten Teile der Elektronik sichtbar beschädigt sein, brechen Sie den Versuch ab und kontaktieren Sie die Versuchsassistenten, ebenso bei ernsthaften Verletzungen durch z. B. heißes Wasser.

Obwohl der Aufbau zur Abmilderung äußerer Störungen in eine Kiste eingebaut ist, ist er trotzdem noch sehr empfindlich. Halten Sie deshalb Fenster und Türen während der gesamten Messung geschlossen und vermeiden Sie jegliche Art von Zugluft.

Die schwarze Platte zur Bestimmung der Wärmestrahlung der Umgebung muss für die Messungen der Würfelseiten aus der Kiste entfernt werden.

Nutzen Sie die digitalen Thermometer für alle Temperaturmessungen. Achten Sie darauf, dass das Thermometer für die Raumtemperatur nicht bspw. durch Sonnenstrahlen beeinflusst wird. Zur Messung der Wassertemperatur können Sie das entsprechende Thermometer durch ein Loch im Deckel in den Leslie-Würfel halten.

Insgesamt sollen 10 Messreihen durchgeführt werden. Während jeder Messreihe werden jeweils die Spannung für die schwarze Platte ( $U_0$ ), die Wassertemperatur ( $T_{\text{wasser}}$ ), die Raumtemperatur ( $T_r$ ) und die Spannungen für alle vier Würfelseiten ( $U_{\text{schwarz}}$ ,  $U_{\text{weiß}}$ ,  $U_{\text{matt}}$  und  $U_{\text{spiegelnd}}$ ) gemessen und protokolliert. Die gesamte Durchführung des Versuchs lässt sich in zwei Teile gliedern. Im ersten Teil werden 5 Messreihen mit (nahezu) kochendem Wasser durchgeführt. Für den zweiten Teil kühlt man den Würfel durch Zugabe von kaltem Leitungswasser etwas ab. Danach werden die restlichen 5 Messreihen analog zum ersten Teil gemacht.

### Teil 1:

1. Füllen Sie den Leslie-Würfel bis zu  $3/4$  mit kochendem Wasser. Es muss dann etwa eine Minute gewartet werden, bis sich eventuelle Temperaturunterschiede ausgeglichen haben.
2. Schalten Sie das Voltmeter und den dazugehörigen elektronischen Verstärker ein, und stellen Sie die Thermosäule in etwa 15 cm Abstand vor den Würfel. Achten Sie darauf, die Würfelseite während der Messungen senkrecht zur Thermosäule auszurichten.
3. Zur Nullpunktbestimmung ( $U_0$ ) positionieren Sie die schwarze Abschirmplatte zwischen Leslie-Würfel und Thermosäule. Tragen Sie bei dieser Gelegenheit auch die aktuelle Raumtemperatur ( $T_r$ ) ein.

4. Bestimmen Sie nun nacheinander für alle vier Seiten des Würfels die Spannungen  $U_{\text{schwarz}}$ ,  $U_{\text{weiß}}$ ,  $U_{\text{matt}}$  und  $U_{\text{spiegelnd}}$  über die Thermosäule. Protokollieren Sie die Wassertemperatur  $T_w$  für jede Würfelseite einzeln, da sich die Temperatur anfangs sehr schnell verändert. Beachten Sie außerdem, dass die Messelektronik eine Zeitkonstante besitzt, d. h. der Wert darf nach dem Drehen des Würfels erst nach ca. 20 Sekunden abgelesen werden.
5. Warten Sie, bis sich die Wassertemperatur um 2 bis 3 K verringert hat. Dann wiederholen Sie die Arbeitsschritte 3 bis 5 (Messung der Raumtemperatur, Bestimmung von  $U_0$  und  $U_i$  und Protokollierung der Wassertemperatur  $T_i$  für  $i =$  alle Seiten des Würfels), insgesamt 5 Mal.

**Teil 2:**

1. Geben Sie so viel kaltes Wasser in den Leslie-Würfel, bis er fast komplett gefüllt ist.
2. Warten Sie nach Zugabe des Wassers etwa 30 Sekunden und wiederholen Sie die Messung der verschiedenen Würfelseiten 5 Mal. Auch hier sollten Sie zwischen den einzelnen Messreihen warten, bis sich das Wasser um etwa 2 K abgekühlt hat.
3. Falls nicht bereits geschehen, schätzen Sie nun die Messungenauigkeiten ab und tragen Sie diese Werte in Ihr Protokoll ein.

Tragen Sie alle Messwerte in Tabelle 5.1 ein und lassen Sie die Werte von Ihrer Versuchsassistentin zum Abschluss des Versuchs abzeichnen. Beachten Sie, dass nur vollständige Protokolle abgezeichnet werden. Räumen Sie den Versuchsaufbau auf und schalten Sie alle Geräte aus (bspw. Stromzufuhr an den Steckerleisten ausschalten). Das Wasser sollte zu diesem Zeitpunkt bereits lauwarm sein, so dass Sie es ohne Probleme aus dem Würfel abgießen können sollten. Falls dem nicht so ist, warten Sie bis es sich weiter abgekühlt hat. Nehmen Sie auf keinen Fall den Würfel in die Hand, solange er mit noch heißem Wasser gefüllt ist.

Notieren Sie sich hier die Abschätzung der Messungenauigkeiten für alle Messgrößen<sup>1</sup>:

$$\Delta U_0[\text{mV}] = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \Delta U[\text{mV}] = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\Delta T_r[^\circ\text{C}] = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \Delta T_w[^\circ\text{C}] = \underline{\hspace{2cm}}$$

---

<sup>1</sup>Orientieren Sie sich am Ablesefehler des Messgeräts als Schätzwert für den Fehler. Für gleiche Messinstrumente (z. B. Thermometer mit denselben Skaleneinteilungen) sollten sie daher auch die gleichen Fehler annehmen, zumindest sofern die Messwerte beim Ablesen ähnlich stabil angezeigt wurden.

Nr.	Raum		schwarz		weiß		matt		spiegelnd	
	$U_0$ [mV]	$T_r$ [°C]	$T_w^{schw}$ [°C]	$U_{schw}$ [mV]	$T_w^w$ [°C]	$U_w$ [mV]	$T_w^m$ [°C]	$U_m$ [mV]	$T_w^{sp}$ [°C]	$U_{sp}$ [mV]
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

**Tabelle 5.1:** Tabelle für die Messwerte

AT: \_\_\_\_\_  
 (Datum) \_\_\_\_\_  
 (Unterschrift Versuchsassistentz)

# 6 Auswertung (zu Hause)

## 6.1 Nachweis des Stefan-Boltzmann Gesetzes

Als Erstes sollen Sie überprüfen, ob ihre Messdaten das Stefan-Boltzmann Gesetz (Gl. (4.2)) bestätigen.

Bei der Versuchsdurchführung haben Sie für jede Temperatur der vier Seiten des Würfels eine korrespondierende Spannung mit der Thermosäule gemessen. Das Stefan-Boltzmann Gesetz ist zwar für eine Leistung formuliert, aber die Spannung, die Sie mit der Thermosäule messen, ist dieser proportional. Es gilt also  $(U_w - U_0) \propto (T_w^4 - T_r^4)$ , wir erwarten für unsere Messwerte entsprechend einen linearen Verlauf.

Grafisch aufgetragen sollten die Wertepaare dann mathematisch folgender Form entsprechen:

$$(U_w - U_0) = a \cdot (T_w^4 - T_r^4) + b \quad (6.1)$$

Es handelt sich also um eine Geradengleichung der allgemeinen Form  $y = a \cdot x + b$ . Um nun zu prüfen, ob dieser lineare Zusammenhang auch tatsächlich vorliegt, müssen Sie den Graphen ihrer Messdaten zeichnen.

Was müssen Sie auf der Abszisse des Plots eintragen?

---

Was müssen Sie auf der Ordinate des Plots eintragen?

---

Wie werden jeweils die Größen  $a$  &  $b$  in einer Geradengleichung im Allgemeinen genannt?

---

Welche Einheiten werden  $a$  &  $b$  in unserem speziellen Fall haben?

---

Zu ihren gemessenen Werten für  $U_w$ ,  $U_0$ ,  $T_w$  und  $T_0$  haben Sie jeweils eine Fehlerabschätzung (Messungenauigkeiten) notiert. Wenn Sie ihre Größen nun auf die in Gl. (6.1) gezeigte Form bringen, müssen diese Fehler entsprechend konvertiert werden.

Den allgemeinen Zusammenhang zwischen dem Fehler einer Funktion, die auf fehlerbehafteten Größen basiert, und den einzelnen Fehlern wird durch die Gaußsche Fehlerfortpflanzung beschrieben:

$$\Delta y = \sqrt{\sum_i^n \left( \Delta x_i \frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2} \quad (6.2)$$

Angewandt auf  $(U_w - U_0)$  ergibt sich

$$\Delta(U_w - U_0) = \sqrt{\Delta U_w^2 + \Delta U_0^2} \quad (6.3)$$

Schreiben Sie die einzelnen Schritte auf, die von Gl. (6.2) zu Gl. (6.3) führen:

Als Vorbereitung für die folgende Rechnung, wie würde die Fehlerformel für  $\Delta T^4$  lauten?

Zeigen Sie nun, dass damit für  $\Delta(T_w^4 - T_r^4)$  folgt:

$$\Delta(T_w^4 - T_r^4) = \sqrt{(4T_w^3 \Delta T_w)^2 + (4T_r^3 \Delta T_r)^2} \quad (6.4)$$



Notieren Sie die Wertepaare samt der zugehörigen Fehler in den Tabellen 6.1–6.4 und plotten sie die entsprechenden Punkte auf dem vorgedruckten Millimeterpapier. Beschriften Sie die Achsen und zeichnen Sie die Fehlerbalken mit ein.

Führen Sie für die schwarze und die weiße Seite eine **rechnerische** Geradenanpassung durch, für die matte und die spiegelnde Seite eine **grafische** Geradenanpassung. Einzelheiten zur Durchführung entnehmen Sie dem jeweiligen Abschnitt und dem Anhang.

Notieren Sie abschließend die aus ihren Geradenanpassungen ermittelten Steigungen in Tabelle 6.5.

***Wichtiger Hinweis:***

Beachten Sie bei der Umrechnung von Temperaturwerten von °C in K unbedingt, ob es sich um einen Temperaturunterschied handelt, wie beispielsweise eine Abweichung oder eine Ungenauigkeit, oder ob Sie einen absoluten Temperaturwert bestimmen wollen.

Während eine Temperatur von 1 °C durch den Wert 273,15 in Kelvin umgerechnet wird (also  $T = 1\text{ °C} \Rightarrow T = 274,15\text{ K}$ ), bewirken die identischen Skalenabstände der beiden Temperaturskalen, dass eine Abweichung oder eine Ungenauigkeit von 1 °C auch einer Ungenauigkeit von 1 K entspricht ( $\Delta T = 1\text{ °C} \Rightarrow \Delta T = 1\text{ K}$ ). Dies ist für Ihre Fehlerrechnungen relevant und sollte nicht vergessen werden!

### 6.1.1 Vorbereitung: Rechnerische Geradenanpassung

Als Vorbereitung auf die folgenden zwei rechnerischen Geradenanpassungen übertragen Sie die allgemeinen Formeln auf die hier gegebenen Größen. Das Prinzip einer rechnerischen Geradenanpassung ist in Abschnitt 8.3 beschrieben. Füllen Sie die nachfolgenden Lücken entsprechend diesem Schema für die Ihnen vorliegenden Größen aus.

**Hinweis:** Für die späteren Rechnungen wird *dringend* empfohlen, ein gängiges Tabellenkalkulationsprogramm zu nutzen, um unnötige Fehler und zeitraubende Berechnungen zu vermeiden.

$$[x] = [T_w^4 - T_r^4] = \sum_i^N \underline{\hspace{10em}}$$

$$[y] = [U_w - U_0] = \sum_i^N \underline{\hspace{10em}}$$

$$[xx] = [(T_w^4 - T_r^4)(T_w^4 - T_r^4)] = \sum_i^N \underline{\hspace{10em}}$$

$$[xy] = [(T_w^4 - T_r^4)(U_w - U_0)] = \sum_i^N \underline{\hspace{10em}}$$

$$\Delta = N \cdot \left[ \underline{\hspace{10em}} \right] - \underline{\hspace{10em}} \cdot \underline{\hspace{10em}}$$

$$a = \underline{\hspace{10em}}$$

$$b = \underline{\hspace{10em}}$$

Die so bestimmte Geradengleichung entspricht der allgemeinen Form  $y = f(x) = a \cdot x + b$ , also hier  $(U_w - U_0) = f(T_w^4 - T_r^4) = a \cdot (T_w^4 - T_r^4) + b$ . Damit können nun auch die Fehler für a und b bestimmt werden:

$$(\Delta(U_w - U_0))^2 = \frac{1}{N-2} \sum_i^N \left( \left( a \cdot \underline{\hspace{10em}} + b \right) - \underline{\hspace{10em}} \right)^2$$

$$\Rightarrow \Delta a = \sqrt{(\Delta(U_w - U_0))^2 \frac{N}{\Delta}}$$

$$\Delta b = \sqrt{(\Delta(U_w - U_0))^2 \frac{[(T_w^4 - T_r^4)(T_w^4 - T_r^4)]}{\Delta}}$$

### 6.1.2 Schwarze Würfelseite

#	$U_w - U_0$ [mV]	$\Delta(U_w - U_0)$ [mV]	$T_w^4 - T_r^4$ [K <sup>4</sup> ]	$\Delta(T_w^4 - T_r^4)$ [K <sup>4</sup> ]
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

**Tabelle 6.1:** Werte für die schwarze Würfelseite

Nutzen Sie die Formeln, welche Sie zuvor auf die hier vorliegenden Größen übertragen haben, und berechnen Sie die entsprechenden Werte. Denken Sie bitte daran, die Einheiten der berechneten Werte anzugeben.

$$[T_w^4 - T_r^4] = \underline{\hspace{10em}} \quad [U_w - U_0] = \underline{\hspace{10em}}$$

$$[(T_w^4 - T_r^4)(T_w^4 - T_r^4)] = \underline{\hspace{10em}}$$

$$[(T_w^4 - T_r^4)(U_w - U_0)] = \underline{\hspace{10em}}$$

$$\Delta = \underline{\hspace{10em}}$$

$$a = \underline{\hspace{10em}}$$

$$b = \underline{\hspace{10em}}$$

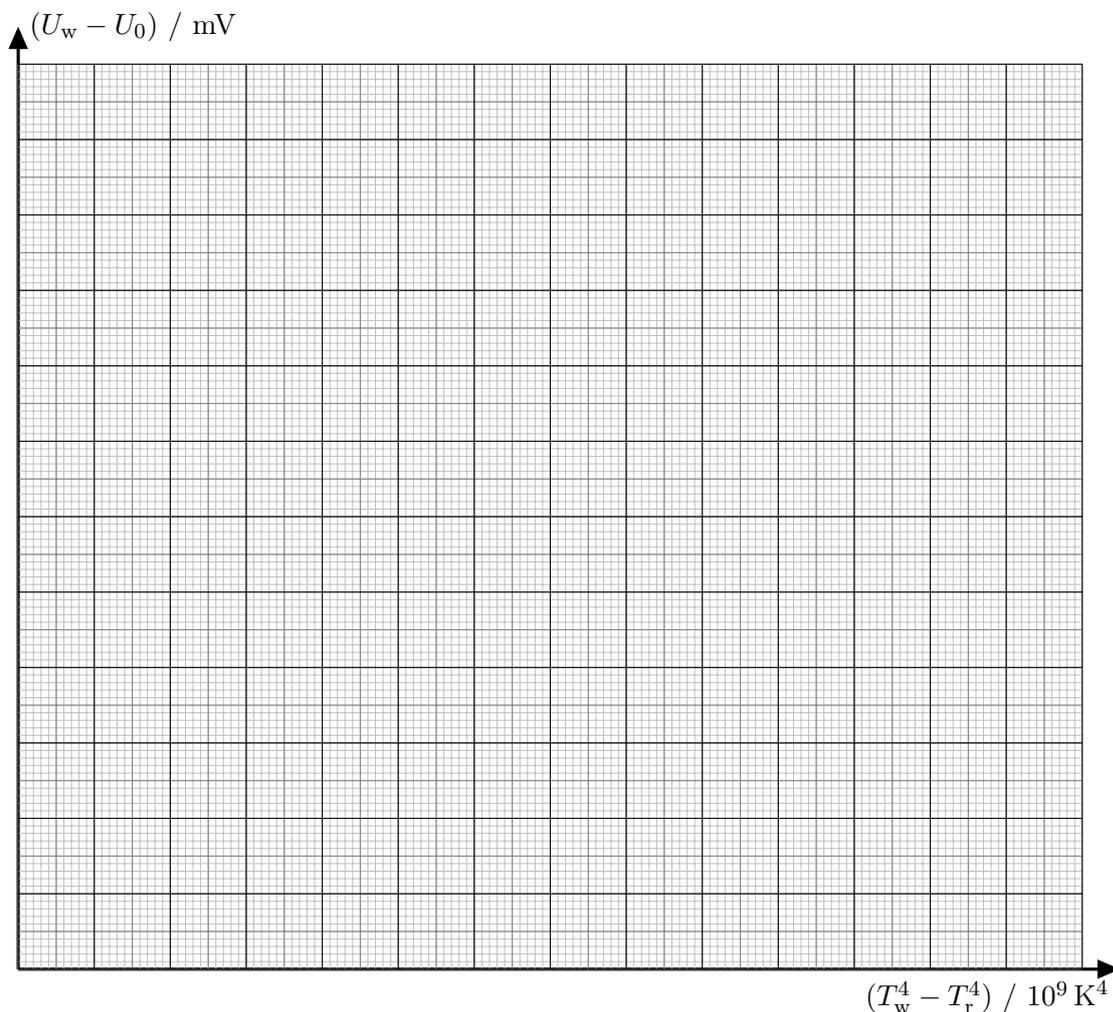
$$(\Delta(U_w - U_0))^2 = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\Delta a = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\Delta b = \underline{\hspace{10cm}}$$

Tragen Sie nun Ihre 10 Wertepaare für diese Würfelseite in Diagramm 6.1 auf und zeichnen Sie die Gerade für die von Ihnen berechneten Parameter ein. Dafür wählen Sie zwei  $x$ -Werte im Wertebereich Ihres Diagramms, am besten einmal möglichst weit links und einmal rechts. Berechnen Sie die dazugehörigen  $y$ -Werte und nutzen Sie diese zwei Punkte, um die Gerade einzuzichnen. Ihre gewählten Punkte lauten:

$$P_1 \left( \quad \mid \quad \right) \qquad P_2 \left( \quad \mid \quad \right)$$



**Abbildung 6.1:** Auftragung der Werte und berechneten Geraden für die schwarze Würfelseite. Beachten Sie die vorgegebenen Einheiten und insbesondere auch deren Zehnerpotenzen.

### 6.1.3 Weiße Würfelseite

#	$U_w - U_0$ [mV]	$\Delta(U_w - U_0)$ [mV]	$T_w^4 - T_r^4$ [K <sup>4</sup> ]	$\Delta(T_w^4 - T_r^4)$ [K <sup>4</sup> ]
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

**Tabelle 6.2:** Werte für die weiße Würfelseite

Wiederholen Sie die Rechnungen wie bei der schwarzen Würfelseite nun auch für die weiße Würfelseite. Denken Sie erneut bitte an die Einheiten der berechneten Werte.

$$[T_w^4 - T_r^4] = \underline{\hspace{10em}} \quad [U_w - U_0] = \underline{\hspace{10em}}$$

$$[(T_w^4 - T_r^4)(T_w^4 - T_r^4)] = \underline{\hspace{10em}}$$

$$[(T_w^4 - T_r^4)(U_w - U_0)] = \underline{\hspace{10em}}$$

$$\Delta = \underline{\hspace{10em}}$$

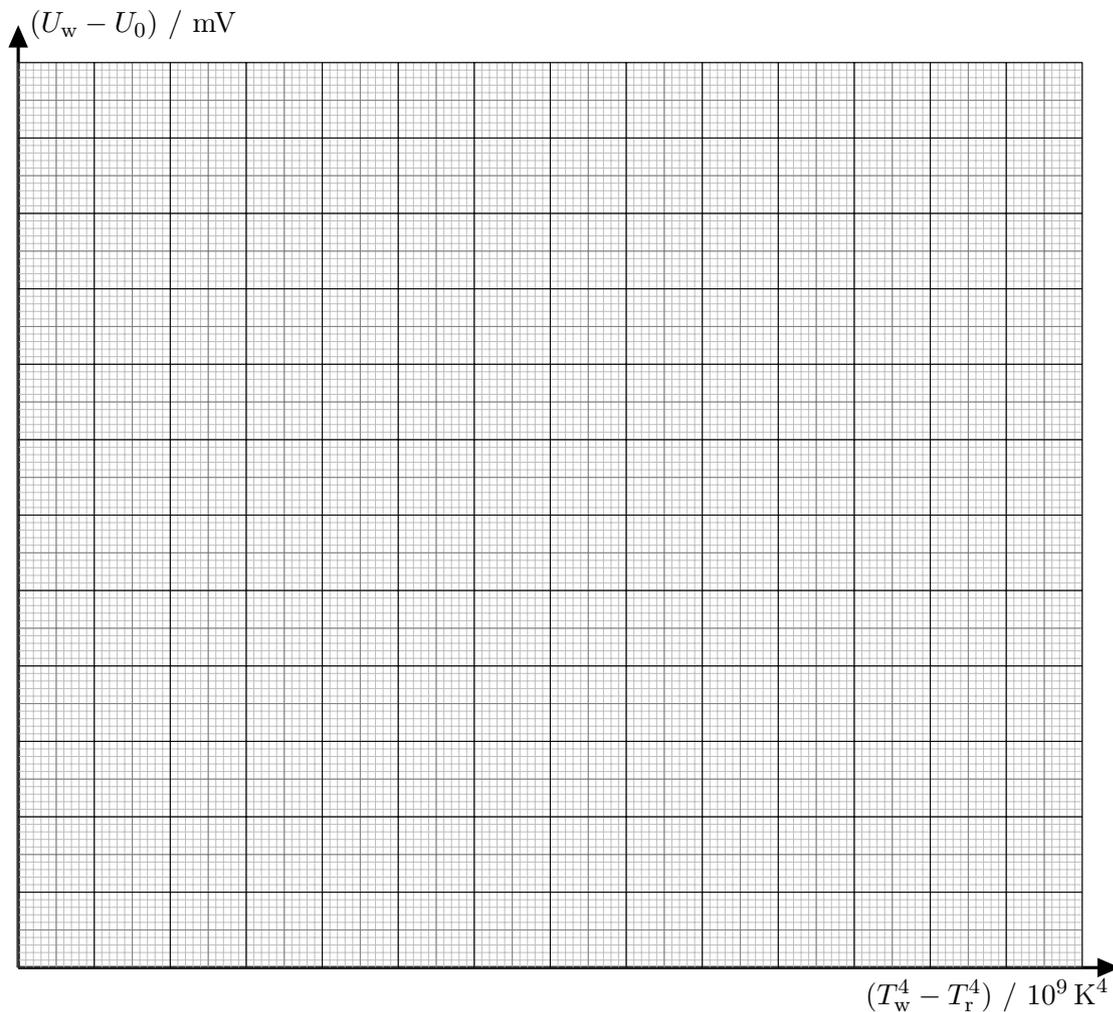
$$a = \underline{\hspace{10em}} \quad b = \underline{\hspace{10em}}$$

$$(\Delta(U_w - U_0))^2 = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\Delta a = \underline{\hspace{10cm}} \qquad \Delta b = \underline{\hspace{10cm}}$$

Analog zur schwarzen Seite tragen Sie nun Ihre 10 Wertepaare für die weiße Würfelseite in Diagramm 6.2 auf und zeichnen die Gerade für die von Ihnen berechneten Parameter ein. Wählen Sie erneut zwei  $x$ -Werte im Wertebereich Ihres Diagramms (einmal möglichst weit links und einmal rechts). und berechnen Sie die dazugehörigen  $y$ -Werte. Ihre gewählten Punkte lauten:

$$P_1 \left( \quad \mid \quad \right) \qquad P_2 \left( \quad \mid \quad \right)$$



**Abbildung 6.2:** Auftragung der Werte und berechneten Geraden für die weiße Würfelseite. Beachten Sie die vorgegebenen Einheiten und insbesondere auch deren Zehnerpotenzen.

### 6.1.4 Matte Würfelseite

#	$U_w - U_0$ [mV]	$\Delta(U_w - U_0)$ [mV]	$T_w^4 - T_r^4$ [K <sup>4</sup> ]	$\Delta(T_w^4 - T_r^4)$ [K <sup>4</sup> ]
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

**Tabelle 6.3:** Werte für die matte Würfelseite

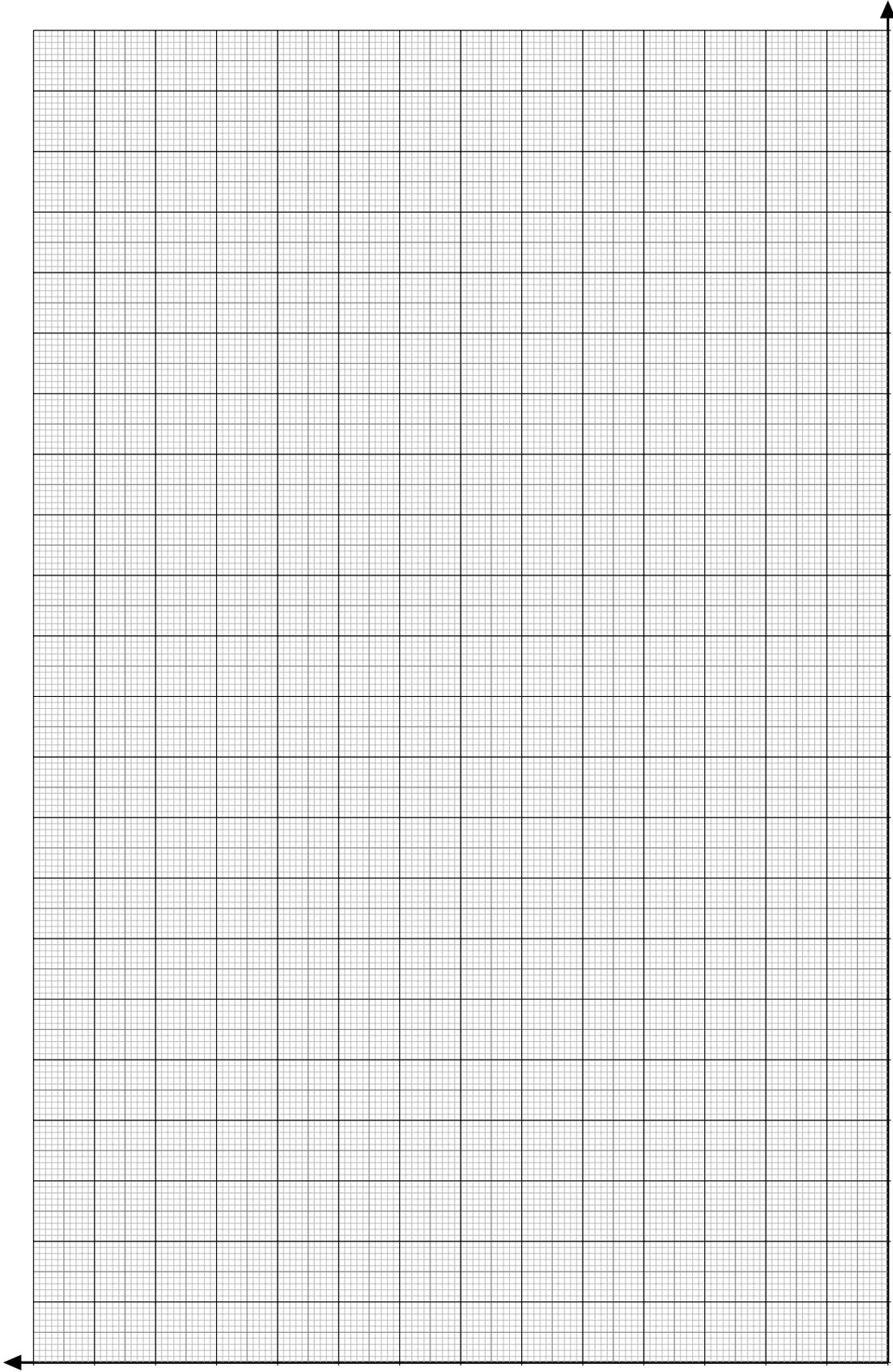
Führen Sie für die matte Würfelseite eine grafische Geradenanpassung durch, deren Prinzip in Abschnitt 8.2 beschrieben ist. Zeichnen Sie dazu die Messdaten mit Fehlerbalken, jeweils die minimale und maximale Extremalgerade und die resultierende gemittelte Gerade samt aller üblichen Beschriftungen auf dem Millimeterpapier ein. Achten Sie auf eine sinnvolle Skalierung der Achsen, damit die Fehlerbalken nicht verschwindend klein werden. Denken Sie daran, die Einheiten der Werte mit anzugeben.

$$a_{\min} = \underline{\hspace{10em}}$$

$$a_{\max} = \underline{\hspace{10em}}$$

$$a = \frac{a_{\max} + a_{\min}}{2} = \underline{\hspace{10em}}$$

$$\Delta a = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2} = \underline{\hspace{10em}}$$



**Abbildung 6.3:**  
*Diagramm für die matte Würfelseite. (Denken Sie daran, dass Sie die Achsen hier selbst beschriften müssen.)*

### 6.1.5 Spiegelnde Würfelseite

#	$U_w - U_0$ [mV]	$\Delta(U_w - U_0)$ [mV]	$T_w^4 - T_r^4$ [K <sup>4</sup> ]	$\Delta(T_w^4 - T_r^4)$ [K <sup>4</sup> ]
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

**Tabelle 6.4:** Werte für die spiegelnde Würfelseite

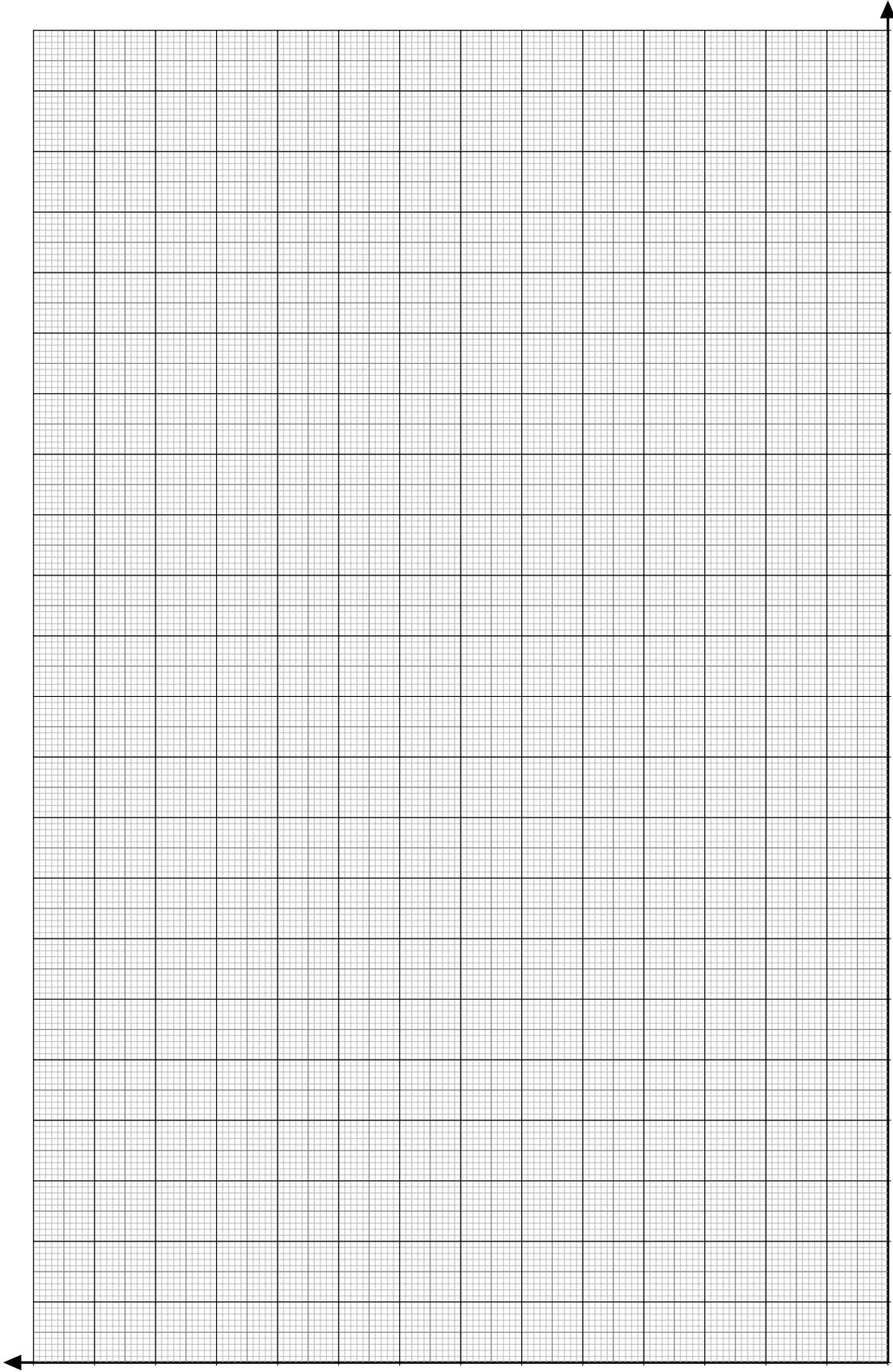
Führen Sie analog zur matten Seite nun auch für die spiegelnde Würfelseite eine grafische Geradenanpassung durch. Zeichnen Sie dazu die Messdaten mit Fehlerbalken, jeweils die minimale und maximale Extremalgerade und die resultierende gemittelte Gerade samt aller üblichen Beschriftungen auf dem Millimeterpapier ein. Achten Sie auf eine sinnvolle Skalierung der Achsen, damit die Fehlerbalken nicht verschwindend klein werden. Denken Sie daran, die Einheiten der Werte mit anzugeben.

$$a_{\min} = \underline{\hspace{10em}}$$

$$a_{\max} = \underline{\hspace{10em}}$$

$$a = \frac{a_{\max} + a_{\min}}{2} = \underline{\hspace{10em}}$$

$$\Delta a = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2} = \underline{\hspace{10em}}$$



**Abbildung 6.4:**  
*Diagramm für die spiegelnde Würfelseite. (Denken Sie daran, dass Sie die Achsen hier selbst beschriften müssen.)*

## 6.2 Bestimmung der Emissivität

Sie sollen nun die Emissivität der verschiedenen Würfelseiten bestimmen. Gemäß der Definition von  $\epsilon$  gilt:

$$\begin{aligned}
 P(T) &= \epsilon P_*(T) \\
 \iff \epsilon &= \frac{P(T)}{P_*(T)}
 \end{aligned}
 \tag{6.5}$$

wobei  $P$  die thermische Strahlungsleistung eines betrachteten realen Strahlers ist und  $P_*$  die Strahlungsleistung eines idealen schwarzen Strahlers gleicher Temperatur  $T$ .

Wenn wir die exakte Strahlungsleistung aller Würfelseiten kennen würden, könnten wir die in den Raumbereich des Messgerätes abgestrahlte Leistung eines Schwarzkörpers aus dem Planckschen Strahlungsgesetz berechnen und dann die Emissivität nach Gl. (6.5) direkt ausrechnen. Dies ist hier aber nicht der Fall, denn wir haben zwar eine der Leistung proportionale Thermospannung gemessen, kennen die genaue Proportionalitätsbeziehung aber erst einmal nicht. Wir wenden daher eine Vereinfachung an, die uns dieses Problem umgehen lässt: Wir setzen die Emissivität der am stärksten strahlenden Würfelseite auf  $\epsilon = 1$ , d. h. wir betrachten unseren besten Strahler als einen idealen Schwarzkörper. Dadurch können wir die Emissivitäten als Verhältnis der zuvor berechneten Steigungen  $a$  zur Steigung unseres pseudo-idealen Strahlers berechnen.

Tragen Sie darum in Tabelle 6.5 zunächst all ihre berechneten Steigungen samt ihrer Fehler ein.

	$a$ [_____]	$\Delta a$ [_____]	$\epsilon$	$\Delta\epsilon$
Schwarz				
Weiß				
Matt				
Spiegelnd				

**Tabelle 6.5:** Berechnung der Emissivität

Identifizieren Sie die Seite mit der größten Steigung und notieren Sie die Emissivität in der

Tabelle als 1. Berechnen Sie nun die übrigen Emissivitäten als  $\epsilon = \frac{a}{a_*}$ , wobei  $a_*$  die Steigung der Seite ist, für die Sie  $\epsilon = 1$  angenommen haben.

Die Fehlerformel für  $\epsilon$  ergibt sich aus der Gaußschen Fehlerfortpflanzung als

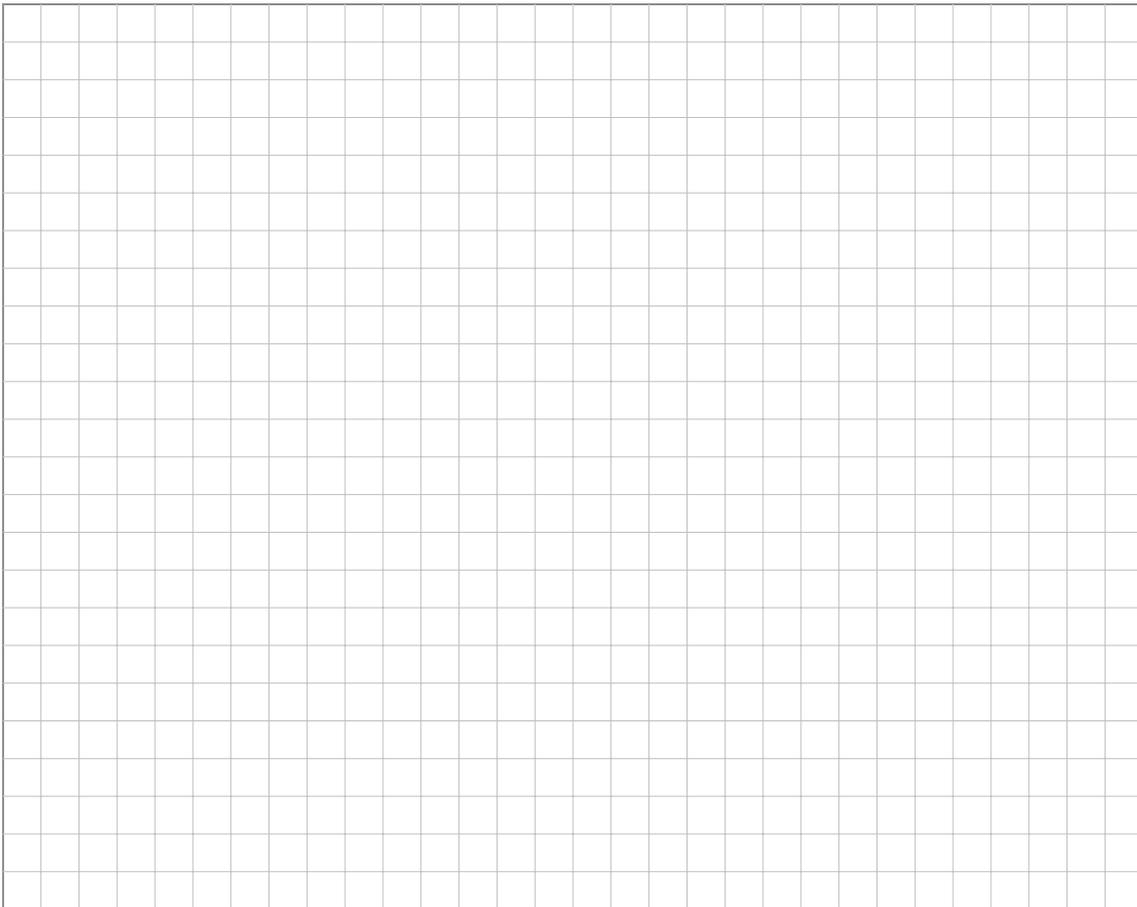
$$\Delta\epsilon = \epsilon \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a_*}{a_*}\right)^2} \quad (6.6)$$

Schreiben Sie die Herleitung von Gl. (6.6) aus Gl. (6.2) auf:

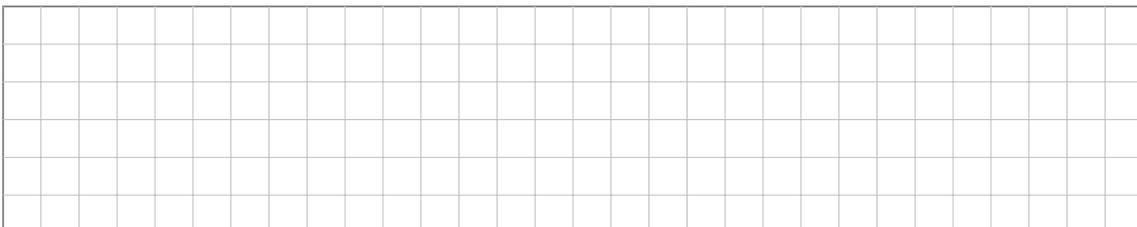
Beachten Sie, dass gemäß Gl. (6.6) auch die Emissivität der am stärksten strahlenden Würfelseite einen berechenbaren Fehler  $\neq 0$  hat. Zwar setzen Sie hier  $\epsilon$  als 1 voraus, aber die Identifizierung des stärksten Strahlers ist von der fehlerbehafteten Steigung abhängig und zwar sogar im Zähler und im Nenner.

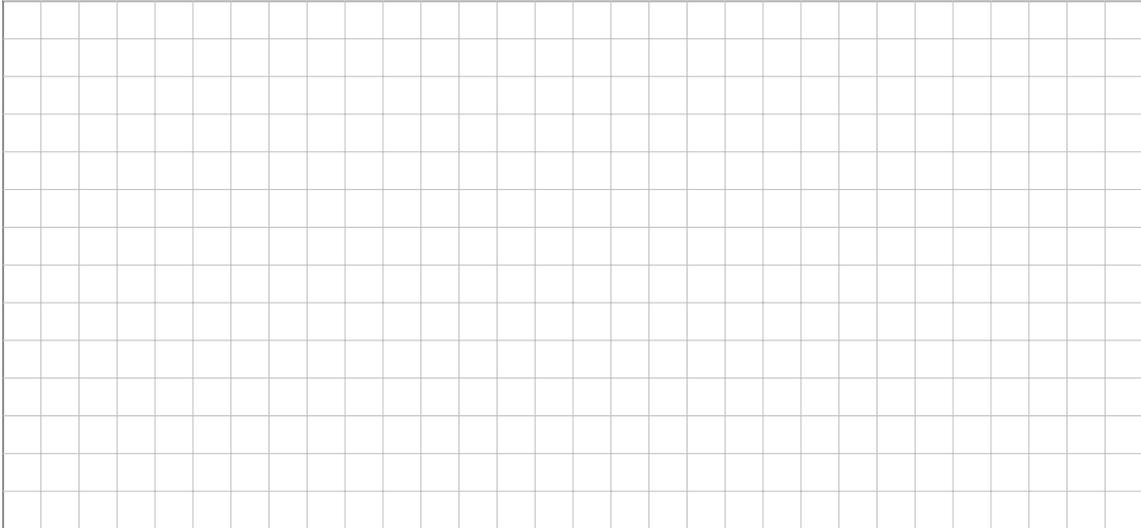
## 7 Diskussion der Ergebnisse (zu Hause)

Was für einen Verlauf haben Sie für ihre Graphen erwartet? Entsprachen die Ergebnisse diesen Erwartungen? Konnten Sie das Stefan-Boltzmann Gesetz in diesem Abschnitt qualitativ bestätigen, und wenn ja, wie?

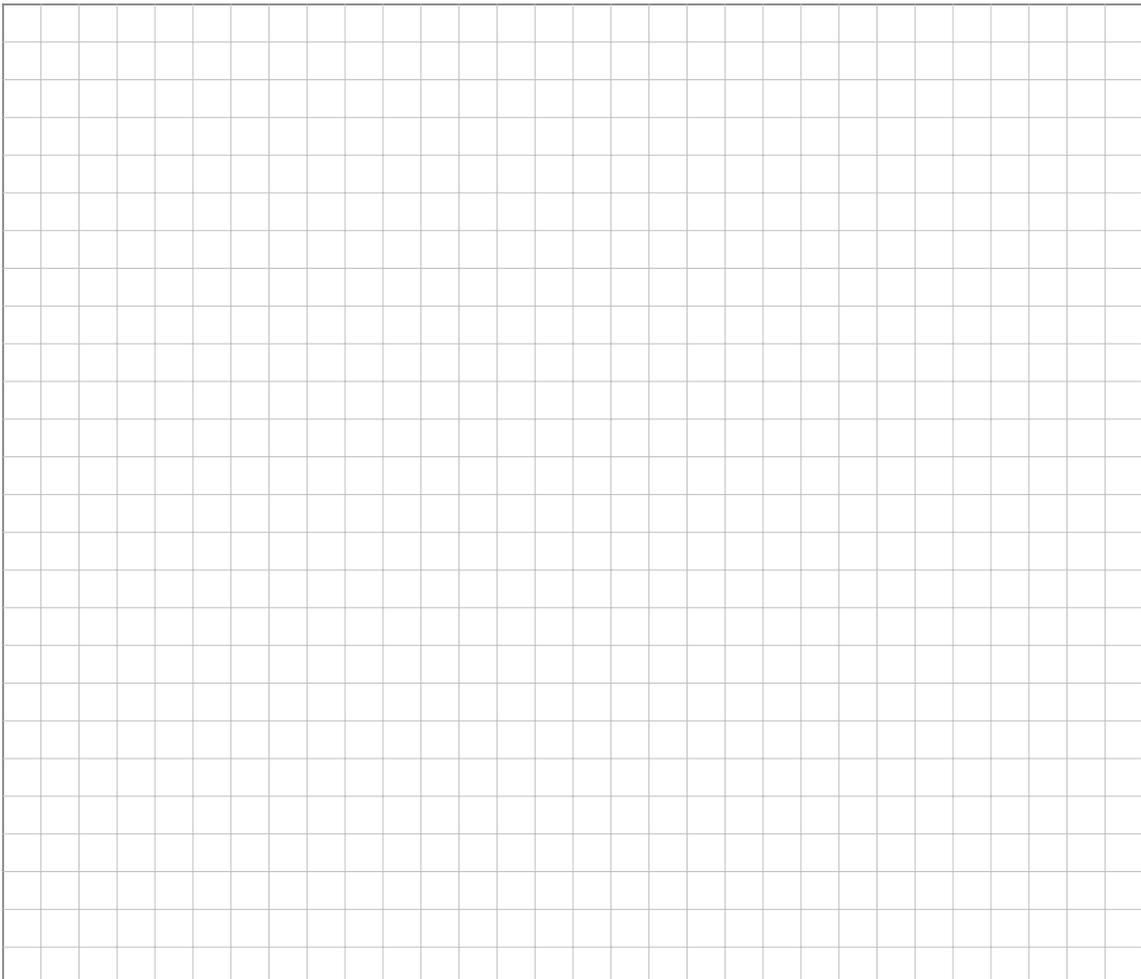


Für welche Würfelseite haben sie  $\epsilon = 1$  angenommen? Warum? Haben Sie erwartet, dass diese Seite die beste Strahlungsleistung zeigen würde? Wie erklären Sie sich dieses Ergebnis?





Versuchen Sie, die Rangfolge der von Ihnen berechneten Emissivitäten qualitativ zu erklären. Warum strahlt die beste Seite am besten, warum die schlechteste am schlechtesten? Was fällt Ihnen bei den anderen beiden Seiten auf?





# 8 Anhang zur Fehlerrechnung

## 8.1 Gaußsche Fehlerfortpflanzung

Die Gaußsche Fehlerfortpflanzung beschreibt den Einfluss fehlerbehafteter Größen  $x_i$  auf die Ungenauigkeit einer sich aus diesen zusammensetzenden Größe  $y$ . Als ein verallgemeinertes Beispiel ist der Wert von  $y$  mit dessen Ungenauigkeit  $\Delta y$  zu bestimmen. Der Wert  $y$  hängt von mehreren anderen Größen  $x_i$  ab,  $y(x_1, x_2, x_3, \dots)$ .

Alle Größen  $x_1, x_2, x_3, \dots$  besitzen jeweils eine Ungenauigkeit  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots$ . Dann ergibt sich  $\Delta y$  aus

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_3} \Delta x_3\right)^2 + \dots},$$

wobei die Brüche  $\frac{\partial y}{\partial x_i}$  partiellen Ableitungen von  $y$  nach einer Größe  $x_i$  entsprechen.

### Ein Beispiel:

Um die Geschwindigkeit  $v = \frac{l}{t}$  eines Fahrzeugs in einer Tempo 30-Zone zu bestimmen wird die Zeit  $t$  gestoppt, welche es für eine Strecke  $l$  benötigt. Beide Werte liegen vor:  $l = (20,0 \pm 0,5) \text{ m}$  und  $t = (2,2 \pm 0,2) \text{ s}$ , also  $v = \frac{20,0 \text{ m}}{2,2 \text{ s}} \approx 9,0909 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Die Fehlerformel lautet hier

$$\begin{aligned} \Delta v &= \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial l} \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \Delta t\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{t} \Delta l\right)^2 + \left(-\frac{l}{t^2} \Delta t\right)^2} \end{aligned} \tag{8.1}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\left(\frac{l}{t} \cdot \frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{l}{t} \cdot -\frac{\Delta t}{t}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{l}{t}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + (-1)^2 \cdot \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2\right)} \\ &= v \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Die Umformungen bis Gleichung (8.2) sind als generelle Vorlage zu verstehen, verglichen mit Gleichung (8.1) ist in diesem Beispiel keine starke Vereinfachung zu beobachten. In einigen Fällen ist dieses Schema jedoch sehr sinnvoll, insbesondere wenn dadurch lange Formeln letztendlich stark gekürzt werden. Allerdings ist zu beachten, dass es nicht auf alle Formeln anwendbar und somit jeder Fall einzeln abzuwägen ist.

Hier ergibt sich durch Einsetzen der Werte  $\Delta v \approx 0,857 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Gerundet und mit umgerechneten Einheiten ist letztendlich  $v \pm \Delta v = (9,1 \pm 0,9) \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx (33 \pm 3) \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .

## 8.2 Grafische Geradenanpassung

Bei einer grafischen Geradenanpassung werden die Parameter  $a \pm \Delta a$  und  $b \pm \Delta b$  einer Geradengleichung der Form  $y = y(x) = a \cdot x + b$  bestimmt. Die Bestimmung der Werte erfolgt anhand der Auftragung mehrerer Wertepaare  $(x_i | y_i)$  und deren Ungenauigkeiten  $\Delta x_i$  und/oder  $\Delta y_i$  in einem Diagramm, in welchem die Werte einem möglichst linearen Verlauf entsprechen. Falls nur jeweils die  $x_i$ - oder die  $y_i$ -Werte Ungenauigkeiten besitzen, sind die entsprechenden Fehlerbalken im Diagramm zu beachten. Sollten Ungenauigkeiten beider Größen vorliegen<sup>1</sup>, sind die entsprechenden Fehlerflächen relevant.

Ein essentieller Schritt dieser Geradenanpassung ist die Findung von den zwei sogenannten Extremalgeraden, also einer Geraden mit möglichst kleiner und einer mit möglichst großer Steigung, welche beide gewissen Regeln unterliegen:

1. Die Gerade schneidet  $\frac{2}{3}$  aller Messwerte in deren Fehlerbereichen.
2. Die restlichen Messwerte sind nicht weiter als der doppelte Fehlerabstand von der Geraden entfernt.

Es kommt vor, dass die zweite Regel nicht ganz erfüllt werden kann. Falls möglich sollte jedoch darauf geachtet werden. Dabei ist zu beachten, dass die Geraden unabhängig voneinander erstellt werden. Die Gerade maximaler Steigung kann durchaus andere Werte schneiden, als die Gerade minimaler Steigung. Häufig lassen sich nur so die wirklich größte und kleinste Steigung finden.

Wenn die Punkte im Diagramm eine deutliche Abweichung von den erforderlichen Regeln benötigen würden ist die Überlegung notwendig, ob eine rechnerische Geradenanpassung nicht sinnvoller wäre. Sollten nur einzelne Werte deutlich sichtbar aus dem linearen Verlauf fallen, so können diese ausgeklammert und mit zusätzlicher Begründung als Ausreißer unbeachtet bleiben.

Um die Extremalgeraden zu finden ist es sinnvoll beispielsweise ein langes Lineal an das Diagramm zu halten, um mehrere potentielle Geraden mit minimaler/maximaler Steigung auszuprobieren.

Im nächsten Schritt werden die Steigungswerte der Extremalgeraden  $a_{\text{min/max}}$  und die  $y$ -Achsenabschnitte  $b_{\text{min/max}}$  bestimmt. Damit die relativen Fehler klein ausfallen, sind dem Diagramm entsprechend möglichst große Steigungsdreiecke einzuzeichnen. An diesen werden dann unter Beachtung der Achsenskalierung die jeweiligen  $\Delta x$  und  $\Delta y$  abgelesen. Dabei ist zu beachten, dass es sich hier nicht um Ungenauigkeiten, sondern Differenzen, handelt. Die Steigungen der Extremalgeraden ergeben sich aus  $a = \pm \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , wobei das Vorzeichen dadurch bestimmt ist, ob die jeweilige Gerade steigend (+) oder fallend (-) ist. Sollte eine Achse entgegen der Norm invertiert beschriftet sein, ist dies natürlich bei der Vorzeichenwahl zu

---

<sup>1</sup>In der realen Anwendung kann es auch vorkommen, dass Ungenauigkeiten so klein ausfallen, dass sie nicht sinnvoll im Diagramm dargestellt werden können. Dies gleicht effektiv dem Fall, dass nur von der jeweils anderen Größe Ungenauigkeiten vorliegen.

berücksichtigen.

Die Werte  $b_{\min/\max}$  können entweder direkt im Diagramm abgelesen werden oder müssen mittels der Geradensteigung und einem Punkt auf der Geraden mit Hilfe der umgestellten Geradengleichung  $b_{\min/\max} = y - a_{\min/\max} \cdot x$  bestimmt werden.

Zuletzt wird die Ausgleichsgerade bestimmt, indem die vorherigen Geradenparameter einfach gemittelt werden. Die Ungenauigkeiten der entsprechenden Mittelwerte bauen somit jeweils auf nur zwei Werten auf, wodurch sich die Formel der Standardabweichung des Mittelwerts stark vereinfacht:

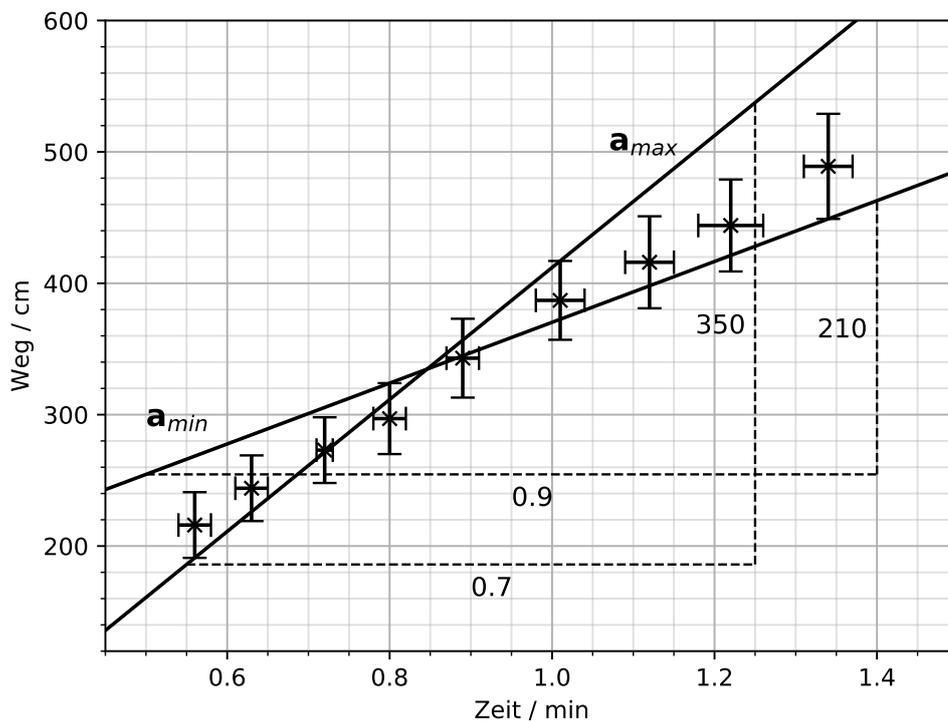
$$a = \frac{a_{\max} + a_{\min}}{2} \quad \& \quad \Delta a = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2},$$

$$b = \frac{b_{\max} + b_{\min}}{2} \quad \& \quad \Delta b = \left| \frac{b_{\max} - b_{\min}}{2} \right|.$$

*Anmerkung:* Allgemein müssten auch bei  $\Delta a$  Betragsstriche stehen. Da  $a_{\min}$  und  $a_{\max}$  jedoch in einer festen Relation stehen, ergibt sich für  $\Delta a$  automatisch ein positiver Wert.

Würde diese Gerade im Diagramm eingezeichnet werden, sollte sie die beiden Extremalgeraden genau mittig schneiden.

**Ein Beispiel:**



**Abbildung 8.1:** Vollständige grafische Geradenanpassung. Extremalgeraden und Steigungsdreiecke sind eingezeichnet und beschriftet. Dazugehörige Rechnungen befinden sich im Text. angedeutet.

In Abbildung 8.1 ist eine grafische Geradenanpassung mit neun Werten eines fiktiven Ex-

periments und deren Ungenauigkeiten aufgetragen. Es ist die zu den Daten gehörige Geschwindigkeit  $v \pm \Delta v$  in  $\text{m/s}$  gesucht.

Die Extremalgeraden werden jeweils durch das Schneiden von sechs Werten und deren Fehlerbalken/-flächen bestimmt, während die übrigen drei Werte möglichst noch im doppelten Fehlerabstand getroffen sind. Zur Berechnung der Steigungswerte werden die Steigungsdreiecke benutzt, also im Beispiel hier

$$a_{\min} = \frac{210 \text{ cm}}{0,9 \text{ min}} \approx 233,33 \frac{\text{cm}}{\text{min}} \quad \& \quad a_{\max} = \frac{350 \text{ cm}}{0,7 \text{ min}} = 500 \frac{\text{cm}}{\text{min}}.$$

Da beide Geraden von links nach rechts steigen, haben sie positive Steigungswerte. Die  $y$ -Achsenabschnitte der beiden Extremalgeraden lassen sich in diesem Fall nicht einfach aus dem Diagramm ablesen und müssen somit berechnet werden. Indem nun ein beliebiger Punkt einer Gerade zusammen mit der jeweiligen Steigung verwendet wird, lassen sich die gesuchten Werte finden. Für dieses Beispiel wird für  $a_{\min}$  bei  $x = 0,6 \text{ min}$  und für  $a_{\max}$  bei  $x = 1,3 \text{ min}$  geschaut, sodass sich die beiden Punkte  $(0,6 | 280)$  und  $(1,3 | 560)$  ergeben. Die  $y$ -Achsenabschnitte sind dann

$$\begin{aligned} b_{\min} &= 280 \text{ cm} - 233,33 \frac{\text{cm}}{\text{min}} \cdot 0,6 \text{ min} \approx 140 \text{ cm}, \\ b_{\max} &= 560 \text{ cm} - 500 \frac{\text{cm}}{\text{min}} \cdot 1,3 \text{ min} = -90 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Nun gilt es noch die oben genannten Formeln für  $a \pm \Delta a$  und  $b \pm \Delta b$  anzuwenden und es ergibt sich

$$a \pm \Delta a = (366,665 \pm 133,335) \frac{\text{cm}}{\text{min}} \quad \& \quad b \pm \Delta b = (25 \pm 115) \text{ cm}.$$

Es ist wichtig zu beachten, dass die Steigungswerte nicht der gewünschten Angabe von Ergebnissen entspricht, da die Ergebnisse hier nicht signifikant gerundet sind! Diese genaueren Werte werden genutzt, um weitere Rechnungen durchzuführen, in diesem Fall also die Umrechnung in die gewünschten Einheiten.

Durch Umrechnung der Steigungswerte ergibt sich für die gesuchte Geschwindigkeit  $v \approx (6,111 \pm 2,222) \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , also gerundet  $v = (6,1 \pm 2,2) \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

### 8.3 Rechnerische Geradenanpassung

Die allgemeine Form einer Geradengleichung lautet

$$y = y(x) = a \cdot x + b.$$

Für einen Datensatz von Werten  $x_i$  und  $y_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) lässt sich nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate eine entsprechende Geradengleichung finden. Anders ausgedrückt, es werden die Parameter  $a$  und  $b$  der Geraden so bestimmt, dass die Abweichungen zwischen den Werten und der Gerade minimal sind. Es ist sinnvoll für die Berechnung eigene Ausdrücke zu definieren:

$$\begin{aligned} [x] &= \sum_{i=1}^N x_i & [y] &= \sum_{i=1}^N y_i \\ [xx] &= \sum_{i=1}^N x_i^2 & [xy] &= \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i \\ \Delta &= N \cdot [xx] - [x] \cdot [x] \\ \Rightarrow a &= \frac{N \cdot [xy] - [x] \cdot [y]}{\Delta} & \& \quad b &= \frac{[xx] \cdot [y] - [x] \cdot [xy]}{\Delta}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist es möglich, und in der Regel notwendig, die Ungenauigkeiten von  $a$  und  $b$  zu bestimmen, also die Werte  $\Delta a$  und  $\Delta b$ . Erneut werden passende Ausdrücke definiert:

$$\begin{aligned} (\Delta y)^2 &= \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y(x_i) - y_i)^2 & \text{für } y(x_i) &= a \cdot x_i + b \\ \Rightarrow \Delta a &= \sqrt{(\Delta y)^2 \frac{N}{\Delta}} & \& \quad \Delta b &= \sqrt{(\Delta y)^2 \frac{[xx]}{\Delta}}. \end{aligned}$$

## 9 Literatur

- Fehlerrechnung:  
<https://www.astro.uni-koeln.de/AP/>
- Meschede und Gerthsen: Physik, Springer, Berlin, 24. Aufl., 2010  
[http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e\\_books/index\\_ger.html](http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/index_ger.html)
- Demtröder: Experimentalphysik 1, Springer, Berlin, 6. Auflage, 2013  
[http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e\\_books/index\\_ger.html](http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/index_ger.html)
- Tipler: Physik, Spektrum, Heidelberg, 3. Auflage, 2000
- Westphal: Physikalisches Praktikum, Vieweg+Teubner
- Walcher, Elbel und Fischer: Praktikum der Physik, Teubner Studienbücher Physik
- Wegener: Physik für Hochschulanfänger, Teubner Studienbücher Physik
- Java- Applet der University of Oregon zur Verdeutlichung des Planck-Gesetzes  
<http://jersey.uoregon.edu/vlab/PlanckRadiationFormula/index.html>
- Wikipedia - u.a. Stefan-Boltzmann Gesetz,  
<http://de.wikipedia.org>